Cálculo de variaciones para estudiantes de primer curso de Ingenierías: Problemas Isoperimétricos

Autoría: Mª José Haro Delicado y Mª José Pérez Haro

Temática: Este documento completa otro anterior en el que se introduce a estudiantes de primer curso de ingenierías en el Cálculo Variacional. En este trabajo se abordan los problemas isoperimétricos de gran trascendencia histórica y práctica.

Palabras clave: Cálculo de variaciones, ecuaciones diferenciales, problemas isoperimétricos.

Resumen:

Pretendemos ampliar el estudio presentado en un documento anterior en el que se introducía a los estudiantes universitarios en problemas de cálculo variacional. Con este documento se completa el trabajo anterior, tratando con problemas de gran trascendencia histórica y gran aplicación práctica, como fueron los problemas isoperimétricos. Finalizamos con una simulación de un problema isoperimétrico, utilizando el software de geometría dinámica Geogebra.

1. PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

Se parte de la base de que los estudiantes tienen unos conocimientos básicos de cálculo variacional. Concretamente han de tener clara la idea de funcional, cuál es el problema fundamental del cálculo variacional, cuál es el teorema- condición de Euler y conocer los casos particulares de la ecuación de Euler**.**

En esta sección se ampliarán un poco más los contenidos citados de cálculo variacional, con la excusa de dar solución a los llamados problemas isoperimétricos. Aparece el problema de optimizar funcionales sujetas a condiciones de frontera, pero también sujetas a otro tipo de condiciones que amplían notablemente el número de problemas reales con los que se puede trabajar. Se introducen los contenidos imprescindibles y una serie de ejemplos y ejercicios prácticos muy conocidos y que no requieren un gran aparato matemático para ser resueltos. Se hace necesario resolver ecuaciones diferenciales elementales, con las que se puede trabajar introduciendo las nociones más básicas y que en la mayoría de los casos los estudiantes ya conocerán por estar trabajando con ellas en la materia correspondiente.

Problemas isoperimétricos (igual longitud del contorno).

Podríamos decir que los problemas isoperimétricos son problemas variacionales con ligaduras o condiciones. Ya en la antigua Grecia se trabajaba con este tipo de problemas. Ejemplos típicos de ellos son los problemas como el de la princesa fenicia Dido, fundadora de Cartago. Este problema se relata en la Eneida de Virgilio. Cuando huyendo de Tiro, la princesa llegó al norte de África y quiso comprar un terreno para instalarse en él, el propietario de la tierra le dijo “Te concederé tanto terreno como puedas encerrar con la piel de este buey”. Se cuenta que la princesa cortó la piel a tiras y las unió formando un recinto cerrado que después extendió hasta ocupar la mayor área posible. ¿Qué figura crees que formó con dicha piel?

Podríamos denominar problemas isoperimétricos a aquellos en los que se pretende determinar la figura geométrica de área máxima y perímetro dado.

Con un poco más de generalidad, un problema isoperimétrico se enuncia de la siguiente forma:
Sean F y G dos funciones continuas con derivadas parciales primera y segunda continuas en $[x_0,x_1]$. Entre todas las curvas y=y(x) continuas y con derivada primera continua definidas en

[x_0,x_1], a lo largo de las cuales la funcional $K[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} G(x,y,y')dx$ tiene un valor fijo *l*, se trata de hallar la curva en la que la funcional $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ alcanza su valor extremo.

Para resolver el problema nos vamos a apoyar en el siguiente teorema.

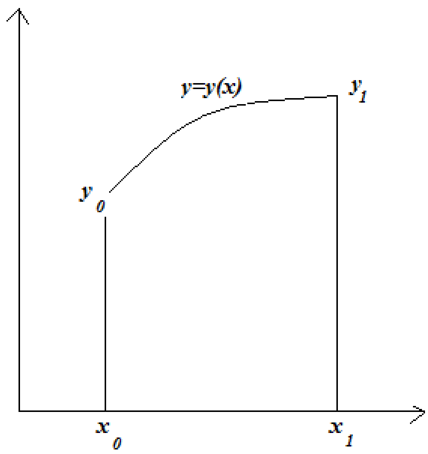
Teorema de Euler: Si la curva *y*=*y*(*x*) nos da el extremo de la funcional $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$ con las condiciones

$$K[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} G(x,y,y')dx=l, \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1$$

Y si *y*=*y*(*x*) no es extremal de la funcional *K* existe una constante λ tal que la curva *y*=*y*(*x*) es extremal de la funcional $L[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y,y')+\lambda G(x,y,y')]dx.$

Utilizando este teorema intentemos resolver el siguiente ejemplo:

Halla la curva *y*=*y*(*x*) de longitud *l*, de manera que el área del trapecio curvilíneo x_0, $y(x_0)$, $y(x_1)$ x_1 sea máxima.



Nos interesa el extremo de la funcional $S=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx; \quad y(x_0)=y_0, \quad y(x_1)=y_1$

con la condición isoperimétrica $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$

Solución: $F(x,y,y')=y; \quad G=\sqrt{1+y'^2}$. Formamos la funcional auxiliar $L=\int_{x_0}^{x_1}\left[y+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right]dx$. La nueva función $F^*=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$ no contiene a *x*, luego tomamos la condición F^*-y' $F^*_{y'}$= C_1;

$y+\lambda\sqrt{1+y'^2}-y'\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1$ que simplificada queda $y-C_1=\dfrac{-\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$. Si, para resolver la ecuación diferencial, introducimos un parámetro *t*, mediante la expresión $y'=\tan t$, nos queda $y-C_1=\dfrac{-\lambda}{\sqrt{1+\tan^2 t}};\quad y-C_1=-\lambda\cos t$.

Como $\dfrac{dy}{dx}=\tan t;\quad dx=\dfrac{dy}{\tan t}=\dfrac{\lambda\sin t dt}{\tan t}=\lambda\cos t\,dt\Rightarrow x=\lambda\sin t$. Las ecuaciones paramétricas de las extremales son:

$$\begin{aligned} x&=\lambda\sin t+C_2\\ y&=-\lambda\cos t+C_1\end{aligned}$$. Si se excluye *t*, nos queda:

$$(x-C_2)^2+(y-C_1)^2=\lambda^2, \qquad (1)$$

que es una familia de circunferencias de centro (C_2, C_1). Si aplicamos las condiciones de frontera e isoperimétrica, obtendremos C_1, C_2 y λ.

La catenaria

Halla la forma de una cuerda flexible, inelástica y homogénea de longitud *l* que está colgada de dos puntos A y B.

Solución: El centro de gravedad en la posición de equilibrio debe ocupar la posición más baja, el problema es, por lo tanto, el de hallar el mínimo de la energía potencial.

Como *Ep=mgh*, si por cada unidad de longitud se tiene una masa ρ, la masa de toda la cuerda será $m=\rho l=\rho\sqrt{1+y'^2}$. Por lo tanto, $Ep=\rho\sqrt{1+y'^2}\,g\,y$. Prescindiendo de las constantes ρ y g, se trata de minimizar $Ep=\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$, sujeto a $l=\sqrt{1+y'^2};\quad y(x_0)=y_0;\quad y(x_1)=y_1$.

Formamos la funcional auxiliar $Ep^*=\int_{x_0}^{x_1}\left[y\sqrt{1+y'^2}+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right]dx$. La ecuación de Euler $F-y'F_{y'}=C_1$ quedaría $(y+\lambda))\sqrt{1+y'^2}-y'\left[\dfrac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}+\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=C_1$, que simplificada se reduce a $y+\lambda=C_1\sqrt{1+y'^2}$. Si hacemos, como en el problema de la superficie mínima de rotación, $y'=sh\,t$, nos queda $y+\lambda=C_1 ch\,t\Rightarrow dy=C_1 sh\,t\,dt$.

Como $\dfrac{dy}{dx}=sh\,t;\quad \dfrac{dy}{sh\,t}=dx;\quad \dfrac{C_1 sh\,t\,dt}{sh\,t}=dx\Rightarrow x=C_1t+C_2$. Si se elimina *t*, obtenemos:

$$y+\lambda=C_1 ch\frac{x-C_2}{C_1}, \qquad (2)$$

que es una familia de catenarias.

Principio de reciprocidad en el problema isoperimétrico

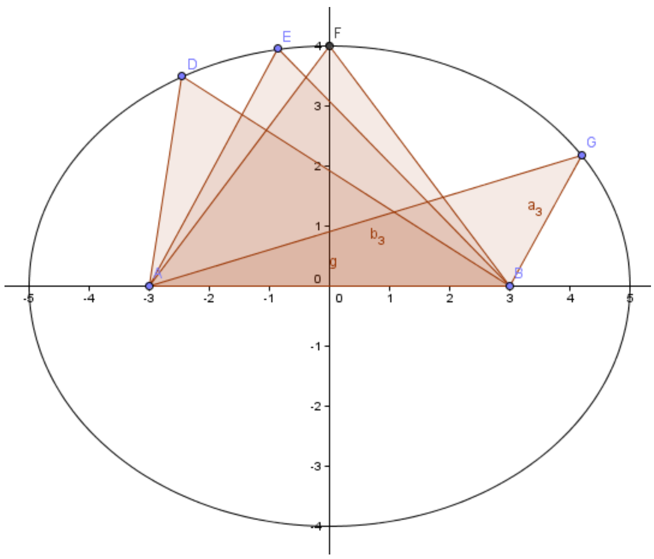
Las extremales de la funcional $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$ con la condición complementaria $K[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = \text{constante}$ coinciden con las extremales de la funcional *K*[*y*(*x*)] con la condición *J*[*y*(*x*)]= constante.

Esto nos lleva, por ejemplo, a decir que si la circunferencia es la curva cerrada de longitud mínima que encierra un área máxima, también es la circunferencia la curva cerrada de área fija S de longitud mínima.

Ejercicio 1: Demostrad que entre todos los triángulos de base y perímetro fijos el de área máxima es el triángulo isósceles. Demostrad también que si son fijas el área y la base, el triángulo isósceles es el de perímetro mínimo.

Solución: Este ejercicio se puede resolver mediante una pequeña simulación con Geogebra.

Consideremos una elipse y situemos dentro de ella triángulos donde dos de los vértices se situarán en los focos. El lado que une los dos focos constituirá la base de los triángulos. El otro vértice se moverá a lo largo de la elipse. Teniendo en cuenta que la suma de distancias a los focos desde cualquier punto de la elipse es constante y que todos los triángulos tienen por base la distancia entre los focos, todos los triángulos que se formarán tendrán el mismo perímetro.



En esta simulación, se construye una elipse cualquiera y sobre ella triángulos de la forma explicada más arriba. Es lógico suponer que la mayor área se obtendrá cuando D coincida con cualquiera de los vértices del eje menor, puesto que en ese caso tendremos la mayor altura posible. Ello se puede observar sobre la figura. El triángulo de área máxima es un triángulo isósceles.

Para resolver la segunda cuestión podemos utilizar el principio de reciprocidad. Si el área y la base son fijas, el de perímetro mínimo será el triángulo isósceles.

Ejercicio 2: Halla las extremales de $J[y(x)] = \int_0^{\pi} y'^2 dx$ con las condiciones $\int_0^{\pi} y^2 dx = 1; \quad y(0) = y(\pi) = 0$

Solución: Creamos la nueva funcional $L[y(x)] = \int_0^{\pi} \left(y'^2 + \lambda y^2\right) dx$. Utilizamos la ecuación de Euler:

$$F_y = 2\lambda y; \quad F_{y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx}2y' = 2y''; \quad 2\lambda y - 2y'' = 0; \quad \lambda y - y'' = 0; \quad y'' - \lambda y = 0$$

$$r^2 - \lambda = 0; \quad r = \pm\sqrt{\lambda}$$

La solución general de la ecuación sería: $y(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$

Si tenemos en cuenta las condiciones de frontera $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$

$$C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\pi} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,\pi} = 0; \quad C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\pi} - C_1 e^{-\sqrt{\lambda}\,\pi} = 0$$

$C_1 e^{\sqrt{\lambda}\,\pi} - \dfrac{C_1}{e^{\sqrt{\lambda}\,\pi}} = 0; \quad C_1\left(e^{2\sqrt{\lambda}\,\pi} - 1\right) = 0$. De aquí se deduce que o bien C_1=0⇒C_2=0, o bien $e^{2\sqrt{\lambda}\,\pi} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda}\pi} = 1 \Rightarrow \lambda = 0$

En ambos casos, tanto si λ=0, como si C_1=C_2=0, sería $y(x)$=0 y no se cumpliría la condición de ligadura $\int_0^{\pi} y^2 dx = 1$.

De todo ello deducimos que λ debe ser negativo y las raíces se podrían poner como $r = \pm i\sqrt{\lambda}$. La solución de la ecuación sería $y(x) = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\, x$.

Si x=0, entonces C_1=0. Si π=0, entonces $0 = C_2 \sin\sqrt{-\lambda}\,\pi \Rightarrow \sqrt{-\lambda}$ ha de ser un número entero, luego -λ=k^2, k=1,2,…

Teniendo en cuenta que $\int_0^{\pi} y^2 dx = 1$, nos queda

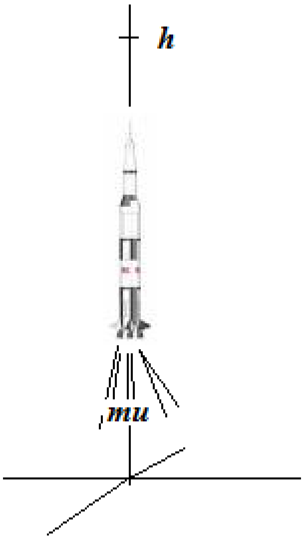
$$\frac{C_2^2}{2}\int_0^{\pi}(1 - \cos 2kx) = \frac{C_2^2}{2}\left[x - \frac{\sin 2kx}{2k}\right]_0^{\pi} = \frac{C_2^2}{2}\pi = 1 \Rightarrow C_2 = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

La solución queda:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin k\, x \qquad (3)$$

Ejercicio 3: Este ejercicio es un ejemplo de problema isoperimétrico que reviste un poco más de dificultad, pero que se considera muy interesante, porque es una muestra de lo mucho que se puede hacer manejando unos pocos conceptos y realizando algunos cálculos poco complejos. El interés también radica en que es una aplicación a un problema real.

Un cohete espacial de masa m, partiendo del reposo, ha de ser acelerado verticalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra hasta una altura *h* en un tiempo *T*, mediante la potencia de su motor (*m*·*u*). Si suponemos que *m* y *g* permanecen constantes durante el vuelo, pretendemos controlar la potencia para minimizar el consumo de combustible, que viene dado por $F[u(t)] = \int_0^T u^2(t)dt$ ¿Durante cuánto tiempo deberíamos acelerar el cohete y cuál será el consumo mínimo?



Solución: Teniendo en cuenta la segunda ley del movimiento de Newton, en el instante *t*, el cohete a una altura *y*=*y*(*x*) debería experimentar una aceleración neta de $y'' = u - g$. Además, hemos de imponer las condiciones $y(0) = y'(0) = 0; \quad y(T) = h$

Ya que *y*´(0)=0, entonces $y(T) = \int_0^T y'(t)dt$, si integramos por partes, obtenemos $y(T) = [y'(t)\cdot t]_0^T - \int_0^T t\cdot y''(t)dt = T\cdot y'(T) - \int_0^T t\cdot y''(t)dt = \int_0^T T\cdot y''(t)dt - \int_0^T t\cdot y''(t)dt = \int_0^T (T-t)y''(t)dt$

Como $y''(t) = u(t) - g$, tenemos:

$$y(T) = \int_0^T (T-t)(u(t)-g)dt = \int_0^T (T-t)u(t)dt - [Tgt]_0^T + \left[g\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \int_0^T (T-t)u(t)dt - \frac{1}{2}gT^2 = h$$

Con lo cual $\int_0^T (T-t)u(t)dt = \frac{1}{2}gT^2 + h = C$ condición de ligadura.

Hemos de optimizar las extremales de $\int_0^T u^2(t)dt$ sujeto a $\int_0^T (T-t)u(t)dt = \frac{1}{2}gT^2 + h = C$.

Creamos la funcional $L[u(t)] = \int_0^T \left[u^2 + \lambda(T-t)u\right]dt$, donde $F^* = u^2 + \lambda(T-t)u$

$F_u^* = 2u + \lambda(T-t); \quad F_{u'}^* = 0$. Aplicando la ecuación de Euler, nos queda $F_u^* = 2u + \lambda(T-t) = 0 \Rightarrow u = \frac{(t-T)\lambda}{2}$

Para hallar el valor de λ tenemos en cuenta la condición de ligadura y obtenemos:

$$\int_0^T (T-t)(t-T)\frac{\lambda}{2}dt = \frac{-\lambda}{2}\int_0^T (t-T)^2\,dt = \frac{-\lambda}{2}\left[\frac{(t-T)^3}{3}\right]_0^T = \frac{-\lambda T^3}{6} = C \Rightarrow -\lambda = \frac{6C}{T^3},$$

luego la solución es $u(t) = 3\left(h + \frac{gT^2}{2}\right)\frac{T-t}{T^3}$

Para hallar el tiempo para el que se consume el mínimo combustible utilizamos la expresión:

$$F(u) = \int_0^T u^2(t)dt = \frac{9C^2}{T^6}\int_0^T (T-t)^2\,dt = \frac{3C^2}{T^3} = 3\left(\frac{h^2}{T^3} + \frac{gh}{T} + \frac{g^2 T}{4}\right).$$

Derivando e igualando a cero obtenemos que el tiempo durante el que deberíamos acelerar el cohete para gastar el menor combustible posible es de:

$$T = \sqrt{\frac{6h}{g}} \qquad (4)$$

siendo el gasto mínimo de combustible de:

$$F(u) = 3\left(\frac{8hg + 6g^3/h}{4\sqrt{6g/h}}\right) \qquad (5)$$

2. SIMULACIÓN DE UN PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

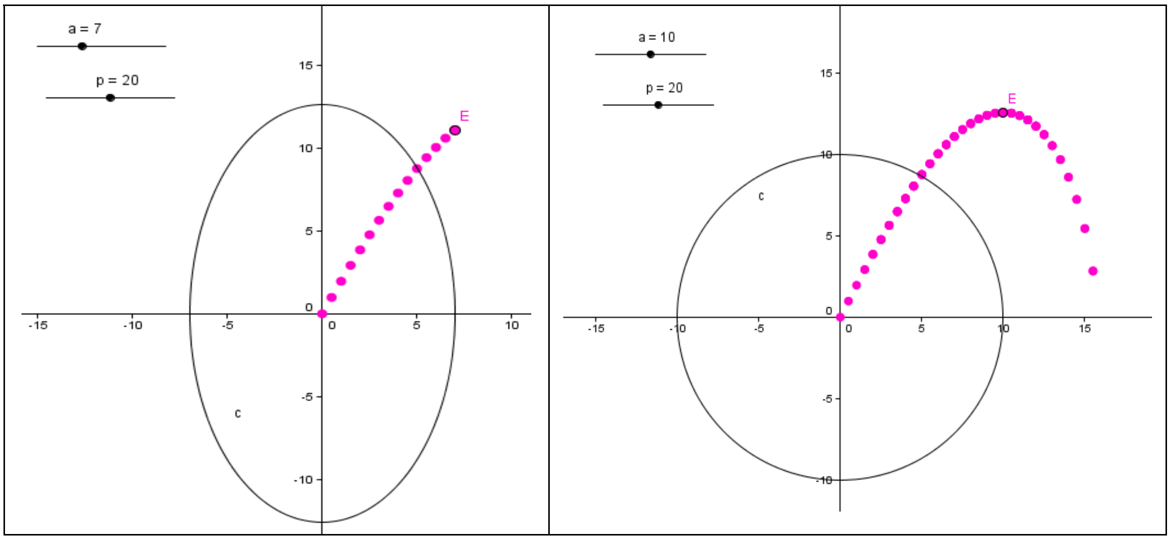
Utilizaremos el software de geometría dinámica Geogebra para simular un caso de problema isoperimétrico sencillo. La razón de elegir este software es la de su sencillez, potencia y versatilidad.

Simulación del problema isoperimétrico

Empezaremos con el problema isoperimétrico en el caso particular de una familia de funciones elípticas. Representaremos gráficamente familias de elipses de longitud constante, de centro (0,0) y ejes los de coordenadas:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

Como se trata de que estudiantes que inician sus estudios universitarios en carreras de ciencias e ingeniería sean capaces de entender y resolver los problemas, para aproximar la longitud de la elipse utilizamos la expresión de Ramanujan $l \cong ([3(a+b) - \sqrt{((3a+b)(a+3b)}\,)]$. Tomando un valor fijo $p = \frac{l}{\pi}$, despejamos b en función de p y de a. Según variamos los valores de a, se modifica b y vamos obteniendo las diferentes elipses. A la vez, se va representando gráficamente el área, con lo cual se podrá observar que el máximo de dicha función se alcanza cuando a=b, es decir, en el caso de la circunferencia. Estamos transformando un problema de cálculo de extremales en un problema de cálculo de máximos y mínimos mediante técnicas adquiridas en 2º de bachillerato, pero ello permite manipular la idea de funcional que trabajamos mediante las áreas de una familia de elipses. A cada elipse se le asocia su área, y se trata de encontrar aquella elipse que dé el área máxima sujeta a una longitud fija. En la gráfica siguiente se muestran algunos de los resultados observables al ir manipulando la expresión.



Se pretende que los estudiantes despejen b de la expresión:

$p \cong ([3(a+b) - \sqrt{((3a+b)(a+3b))}]$. El valor de p, que es igual a la longitud de la elipse dividida entre π, permanecerá fijo. Modificarán a y ello hará que b también se vaya modificando (puesto que es función de a), de manera que el perímetro no se altere. A la vez se representarán las diversas elipses que se vayan obteniendo. Por otro lado, mediante la expresión $(* a * b$, calcularán y representarán gráficamente la función área, que aparece como una curva punteada en la figura. Así podrán comprobar que el punto en el que el área es máxima, se obtiene cuando a=b, es decir, cuando nuestra elipse es una circunferencia, con lo que llegarán a la conclusión de que el extremal es la circunferencia.

3. BIBLIOGRAFÍA

Cerdá, E. (2001). Optimización dinámica, (1a ed). (p. 322). Madrid, España. Pearson Educación

Elsgoltz, L. (1969). Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, (1a ed). (p. 432). Moscú, Rusia. MIR

Krasnov, M.L., Makarenko, G. y Kiseliov, A. (1992). Cálculo Variacional, (1a ed). (p. 190). Moscú, Rusia. MIR.

Troutman, J.L. (1995). Variational Calculus and Optimal Control, (2a ed). (p. 461). New York, USA. Springer.

Autoría

Mª José Haro Delicado.
IES Al-Basit. Profesora de matemáticas y Jefe del Departamento de Matemáticas
Profesora Asociada de la Escuela Superior de Ingeniería Informática de la UCLM en Albacete (Departamento de Matemáticas)

Mª José Pérez Haro
M.S. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense de Madrid

Datos de contacto:
IES Al-Basit avda. de España 42 02006 Albacete

967228716 o 649339565
iesalbasit@iesalbasit.es o mariajose.haro@uclm.es