

Un teorema de Cálculo con interpretaciones geométricas

Autoría: Guillermo Manjabacas Tendero y José Javier Orengo Valverde

Temática: optimización de funciones de una variable

Palabras clave: cálculo, geometría, optimización

Resumen

Presentamos un teorema de Cálculo, desde su intuición a su demostración, con una interpretación geométrica elegante y sencilla. Liga entre sí la solución de tres problemas de optimización de funciones con la división de un triángulo rectángulo en cuatro triángulos rectángulos iguales.

1. INTRODUCCIÓN

Algunos de los teoremas de Cálculo vistos en el Bachillerato admiten una interpretación geométrica sencilla. Hasta el punto de que al alumnado le basta un dibujo para dar por demostrado el teorema Y, recíprocamente, la visualización geométrica suele llevar a conjeturar teoremas de los que sólo algunos pasarán a ser llamados teoremas. Como siempre, la intuición necesita de un formalismo que la confirme.

Por otro lado, algunas intuiciones surgen de un estudio profundo, mientras que otras devienen por casualidad. En cualquier caso, lo que sigue a la intuición es siempre un trabajo matemático donde la incertidumbre y la esperanza se cruzan, dando paso la una a la otra de manera sucesiva hasta llegar, en el mejor de los casos, a un final.

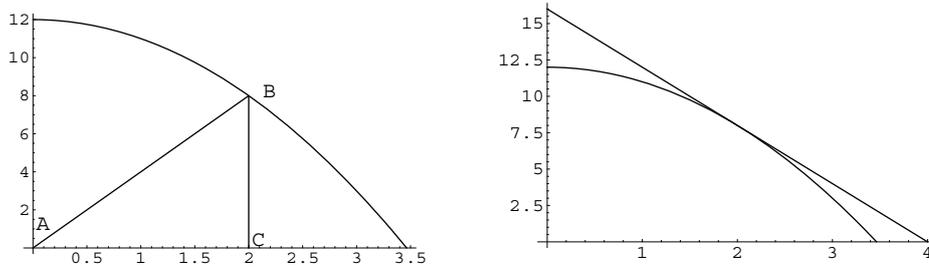
En este artículo demostraremos un teorema surgido de la casualidad cuya interpretación geométrica lo hace hermoso a los ojos de los hombres o, al menos, ante nuestros ojos. Liga entre sí las solución de tres problemas de optimización de funciones reales de variable real con la división de un triángulo rectángulo en cuatro triángulos rectángulos iguales.

2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Consideremos los dos siguientes problemas de sencilla resolución:

P1) Sea la parábola $y = -x^2 + 12$ y el triángulo rectángulo ABC que tiene el vértice A en el origen, otro vértice B en un punto de la parábola situado en el primer cuadrante y el otro vértice C en el semieje positivo OX, de modo que el segmento BC es paralelo al eje OY. Entre los triángulos del tipo anterior, determina el de área máxima.

P2) Sea el triángulo formado en el primer cuadrante por los semiejes positivos y una tangente a la parábola $y = -x^2 + 12$. Determina el punto de tangencia de forma que el área de dicho triángulo sea mínima.



Interpretación geométrica de los problemas P1 (izq.) y P2 (der.)

El que en ambos problemas sea el punto $(2, 8)$ el que determina el área máxima y mínima, respectivamente, hace que nos preguntemos si es simple coincidencia o es posible su generalización.

2.1 Generalizando

Sea la parábola $y = ax^2 + b$, con $a < 0$ y $b > 0$, que generaliza la de los dos problemas anteriores. Mediante un sencillo cálculo se llega a que:

En el problema P1 la función a maximizar es:

$$A_M(x) = \frac{1}{2}x(ax^2 + b) = \frac{ax^3 + bx}{2} \quad (1)$$

cuyo máximo se alcanza en $x = \sqrt{-\frac{b}{3a}}$.

En el problema P2 la función a minimizar es:

$$S_m(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{ax^2 - b}{2ax} \right) (-ax^2 + b) = \frac{-(ax^2 - b)^2}{4ax} \quad (2)$$

cuyo mínimo se alcanza también en $x = \sqrt{-\frac{b}{3a}}$.

De donde se concluye que no es simple coincidencia, sino que responde a algo más general.

2.2 Dos triángulos semejantes

Una vez obtenida la generalización, surge el deseo de conseguir algo más. Y, como si los fantasmas de los tiempos de Euclides surgieran de nuevo, buscamos algo que tenga que ver con la Geometría. Así han funcionado los matemáticos desde siglos. Y puesto que se trata de dos triángulos rectángulos, nos preguntamos: ¿qué relación existe entre ellos?

Basta sustituir $x = \sqrt{-\frac{b}{3a}}$ en ambas expresiones de las áreas para obtener:

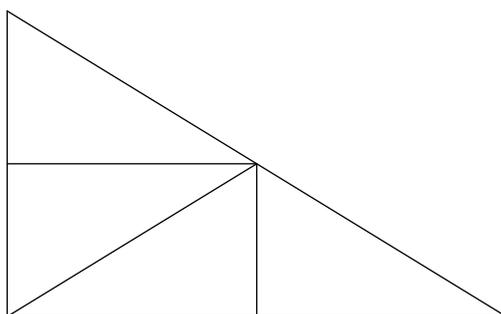
$$A_M \left(\sqrt{-\frac{b}{3a}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{-\frac{b}{a}} \quad \text{y} \quad S_m \left(\sqrt{-\frac{b}{3a}} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \sqrt{-\frac{b}{a}} \quad (3)$$

esto es, ¡un triángulo es cuatro veces el otro!

Ahora bien, si consideramos la base y la altura de los dos triángulos podríamos llegar a la misma conclusión y algo más. En efecto, como:

| | base | altura |
|----|--------------------------------|----------------|
| P1 | $\sqrt{-\frac{b}{3a}}$ | $\frac{2b}{3}$ |
| P2 | $2 \cdot \sqrt{-\frac{b}{3a}}$ | $\frac{4b}{3}$ |

podemos afirmar que, siendo dos triángulos rectángulos con los catetos proporcionales (de razón 2), ambos triángulos ¡son semejantes! Y además, como los catetos de uno son dos veces los del otro, se concluye que el triángulo mayor contiene cuatro veces al menor, como ya sabíamos.



Partición de un triángulo rectángulo en cuatro triángulos rectángulos similares.

Sólo hay una manera de dividir un triángulo rectángulo en cuatro triángulos iguales y semejantes al primero: las dos mediatrices de los catetos se cortan en el punto medio de la hipotenusa y unido este punto al vértice correspondiente al ángulo recto se tienen las tres

líneas interiores que determinan los cuatro triángulos iguales en los que queda dividido el triángulo inicial.

Sorprendentemente, ¡esta es la construcción que resulta de dos problemas de optimización que relacionan triángulos, parábolas y rectas tangentes!

Recíprocamente, dado un triángulo rectángulo es sencillo hallar la ecuación de la parábola que responde al enunciado de problemas semejantes al P1 y P2. Basta tener en cuenta que un punto de la parábola es el punto medio de la hipotenusa del triángulo dado, (x_m, y_m) , que es sencillo de obtener analíticamente y geoméricamente, y resolver el sistema

$$\begin{cases} x_m = \sqrt{\frac{-b}{3a}} \\ y_m = \frac{2b}{3} \end{cases} \quad (4)$$

2.3 Buscando un resultado más general

Después de ver que otras cónicas satisfacían el resultado obtenido, ya nos atrevimos a ser más ambiciosos. Y nos propusimos estudiar qué familia de funciones verificaba nuestro resultado.

Ya que en las cónicas habíamos jugado preferentemente con la monotonía y la concavidad hacia abajo, nos preguntamos: “¿y si es sólo cuestión de monotonía y curvatura?” Comprobamos entonces que para la función $f(x) = \cos x$, definida en el intervalo $[0, \pi/2]$, las soluciones a los problemas P1 y P2 también coincidían. Fue el momento de fijar la hipótesis del Teorema que demostramos a continuación.

3. EL CASO GENERAL

Teorema. Sea $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función que admite derivada de segundo orden en $[0, b]$, y tal que:

1. $f(0) > 0$ y $f(b) = 0$.
2. $f'(x) < 0$ para cada $x \in (0, b)$, de modo que f es estrictamente decreciente en $[0, b]$.
3. $f''(x) < 0$ para cada $x \in (0, b)$, de modo que f es cóncava hacia abajo en $[0, b]$.

Entonces existe un único punto $c \in (0, b)$ tal que

$$f(c) + c \cdot f'(c) = 0 \quad (5)$$

y, además, en este punto se alcanza la solución de los problemas P1 y P2 de triángulos de áreas máxima y mínima descritos anteriormente, donde se cambia la ecuación de la parábola por la curva $y = f(x)$.

Demostración. Dividimos la prueba en tres etapas.

Existencia del punto c . Consideramos la función $g : [0, b] \rightarrow R$ dada por

$$g(x) = f(x) + x \cdot f'(x) \quad (6)$$

Como $g(0) = f(0) > 0$ y $g(b) = f(b) + b \cdot f'(b) < 0$, el teorema de Bolzano permite asegurar que $g(c) = 0$ para algún $c \in (0, b)$. Más aún, este punto es único ya que

$$g'(x) = 2f'(x) + x \cdot f''(x) < 0 \quad \text{para cada } x \in (0, b) \quad (7)$$

de modo que g es estrictamente decreciente en dicho intervalo y, por tanto, no puede anularse en más de un punto.

Solución al problema P1. El área del triángulo correspondiente viene dada por

$$A_m(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x) \quad \text{para } x \in [0, b] \quad (8)$$

La derivada es $A'_m(x) = \frac{1}{2}(f(x) + x \cdot f'(x)) = \frac{1}{2}g(x)$, y por tanto puede asegurarse que $A'_m(x) = 0$ sólo para $x = c$. Como g es estrictamente decreciente, se deduce que $A'_m(x)$ es positiva en $(0, c)$ y negativa en (c, b) , y así c es el punto en el que el área A_m alcanza el máximo absoluto.

Solución al problema P2. Para cada w en $(0, b)$, la recta tangente a la gráfica de la función f , cuya ecuación es

$$y = f'(w) \cdot (x - w) + f(w), \quad (9)$$

Interseca el eje OX en el punto de abscisa

$$x = w - \frac{f(w)}{f'(w)} = \frac{w \cdot f'(w) - f(w)}{f'(w)}, \quad (10)$$

y al eje OY en

$$y = f(w) - w \cdot f'(w). \quad (11)$$

Así, el área del triángulo correspondiente es

$$A_M(x) = -\frac{1}{2} \frac{(f(x) - x \cdot f'(x))^2}{f'(x)} \quad \text{para } x \in (0, b). \quad (12)$$

La derivada de A_M , tras algunos cálculos, puede expresarse como

$$A'_M(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(f(x) - x \cdot f'(x)) \cdot (x \cdot f'(x) + f(x)) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}. \quad (13)$$

Teniendo en cuenta que $f''(x) < 0$ y que $f(x) - x \cdot f'(x) > 0$ para cada $x \in (0, b)$, el signo de $A'_M(x) = 0$ se verifica sólo para $x = c$ y $A'_M(x)$ es negativa en $(0, c)$ y positiva en (c, b) . Se concluye que el mínimo absoluto de A_M se alcanza también en $x = c$.

Nota. Si consideramos el triángulo interior y el exterior que corresponden a las soluciones de los dos problemas planteados, observamos que en el triángulo interior la base mide c y la altura $f(c)$, mientras que en el triángulo exterior la base mide $2c$ y la altura $2f(c)$, de modo que este último triángulo tiene por área cuatro veces el área del triángulo interior, de forma análoga a lo que ocurría en el caso particular de la parábola.

4. EPÍLOGO

El lector habrá observado que en la Introducción mencionábamos tres problemas de optimización, y hasta ahora sólo hemos redactado dos. Enunciamos a continuación el tercer problema.

P3) Sea (x_0, y_0) un punto del primer cuadrante, esto es, con $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$. Consideramos las rectas que pasan por el punto (x_0, y_0) y que intersecan los ejes horizontal y vertical en puntos P y Q con abscisa y ordenada positivas, respectivamente. Si O es el origen, se trata de encontrar el triángulo OPQ de área mínima.



Interpretación geométrica del problema P3.

Llegados a este punto, no debería sorprender que la solución a dicho problema se corresponde con el triángulo de base $2x_0$ y altura $2y_0$ similar a la solución del problema P2. Obsérvese que este tercer problema tiene como particularidad que no está involucrada la gráfica de ninguna función, y la primera coordenada x_0 hace el papel del punto cuya existencia se demostraba en el teorema cuando sí interviene la gráfica de la función f .

No cabe duda que es un resultado sencillo, quizá por ello nos parece tan hermoso. Cálculo y Geometría de la mano, como en los buenos tiempos de Leibnitz y Descartes, tiempos en los que hubieran disfrutado Euclides y Arquímedes.

• **Autoría**

Guillermo Manjabacas Tendero
Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S. Ingeniería Informática de Albacete
Universidad de Castilla La Mancha
Guillermo.Manjabacas@uclm.es

José Javier Orengo Valverde
Departamento de Matemáticas
IES "Andrés de Vandelvira" de Albacete
director@vandelvira.net
Departamento de Matemática Aplicada
E.T.S. Ingenieros Agrónomos de Albacete
Universidad de Castilla La Mancha
Jose.Orengo@uclm.es

copyright© La revista digital "Programas" se concibe como un servicio al profesorado para facilitar la difusión de sus experiencias y reflexiones. Los textos publicados aquí pueden ser copiados y distribuidos públicamente, siempre que cite la autoría y "Programas". No los utilice para fines comerciales y no haga con ellos obra derivada.
