FRACTALES
Acercamos a los alumnos de Secundaria a un universo desconocido

Autoría: PURIFICACIÓN RESCO MARTÍN

Temática: Iniciación para alumnos de Secundaria en el tema de los Fractales.

Palabras clave: Fractales. Mundo real. Apoyo teórico. Elaboración de fractales. Aplicaciones prácticas.

Resumen

Es un trabajo que, originalmente está basado en un montaje de fotografías elaborado utilizando el programa de Powerpoint.
Con esa presentación se pretende acercar a los alumnos de Secundaria a un tema que no contemplan los programas de la materia de Matemáticas. La forma de introducir el tema se basa en imágenes de la vida real sobre las que se sacan consecuencias de "iteración" en las formas.
A partir de esa base real, se explica la Sucesión de Fibonacci, que puede considerarse una base teórica para las "iteraciones dentro de las iteraciones".
A continuación se dan varios ejemplos de Fractales, dando una pequeña reseña de sus autores y de cómo se construye cada Fractal.
Por último se da un ejemplo de una aplicación práctica de los fractales.

0. INTRODUCCIÓN

En los últimos cursos hemos querido aprovechar el Acto de Entrega de Premios de la Olimpiada Matemática de Guadalajara, para acercar a los alumnos de Secundaria a algún tema relacionado con nuestra materia pero que no encontremos en los temarios oficiales de los cursos.

Al finalizar el curso 2007-2008, inspirándonos en los trabajos realizados por alumnos de 1º de ESO, del Instituto, nos decidimos por presentar un trabajo (un montaje en Pawerpoint) relacionado con los Fractales.

Varias preguntas guiaron nuestros pasos: ¿Qué es, o cómo se define, un fractal? ¿Podemos encontrar fractales en la naturaleza? ¿Hay alguna base teórica matemática en la que apoyar la teoría de los fractales? y, si todas esas preguntas tienen un SI por respuesta, ¿pueden servir, los fractales, para algo práctico en la ciencia?

La respuesta a esas preguntas fue guiando la estructura de nuestra presentación. Aquí, por la dificultad que supondría transcribir todas las diapositivas, vamos a hacer un resumen del trabajo, mostrando la línea argumental seguida.

1. DEFINICIÓN

La teoría del caos y, dentro de ella, la geometría fractal, constituyen un campo de investigación reciente que surgió de la aparición de una especie de conjuntos llamados "*monstruos geométricos*" que amenazaban con hacer tambalearse los pilares sobre los que se habían construido muchas propiedades matemáticas y que, por ello, merecían ser condenados al olvido.

Sin embargo, hoy en día constituyen una de las partes más fascinantes de las matemáticas, de las ciencias y de las artes.

Un fractal es un patrón geométrico repetitivo que se puede encontrar en la naturaleza.

Una definición coloquial corta, para una realidad difícil de entender. Casi tres décadas después de que el matemático BENOIT MANDELBROT (20 de Noviembre de 1924) acuñara el término de "fractales", observando la costa inglesa, todavía se desconoce mucho de su funcionamiento.

MICHAEL BARSLEY, conocido matemático y uno de los investigadores punteros en el terreno de la geometría fractal, caracterizó este campo de investigación de la siguiente forma: "*La geometría fractal cambiará a fondo su visión de las cosas. Se arriesga uno a perder definitivamente la imagen inofensiva que se tiene de tantos y tantos objetos y elementos de la naturaleza*" (Revista SUMA, Noviembre 2004)

2. LOS FRACTALES EN LA NATURALEZA.

Siguiendo las pautas dadas en el artículo de la revista anteriormente mencionada, se les presentan a los alumnos fotos reales de elementos de la naturaleza en los que se pueden descubrir fractales: nieve, nubes, árboles, galaxias, hojas, rocas, flores…

LAS HOJAS
Que con sus nervaduras incorporadas, vemos que se alimentan "iterando" caminos.

REVISTA DIGITAL "PROGRAMAS".
CEP DE ALBACETE ISSN: 1988-7922
http://www.abceps.es/revistacep

LAS FLORES

En muchas de ellas se repiten las estructuras conformando su belleza natural.

UN ÁRBOL

De un solo tronco surgen dos o más ramas, que a su vez se dividen en dos o más ramas, y que siguen así formando toda la copa del árbol.

Matemáticamente, un FRACTAL es un objeto que se obtiene después de un proceso de iteración infinita, es decir, después de repetir infinitamente los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior.

Esta definición nos da pie a buscar un apoyo teórico en el desarrollo matemático para estas estructuras.

3. TEORÍA MATEMÁTICA.

El apoyo matemático para estudiar "iteraciones", nos lo da una sucesión de números conocida como "La Sucesión de Fibonacci"

LEONARDO DE PISA (FIBONACCI) (1170-1240). Matemático italiano. Su principal aportación a las matemáticas fue la introducción del sistema de numeración indo-arábigo, que es el utilizado en la actualidad.

"*Las nueve cifras indias son 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, con estas nueve cifras y con el signo 0…, puede escribirse cualquier número, tal y como se demuestra más abajo…."* Con estas palabras empezó Fibonacci su primer y más conocido libro "*LIBER ABACI*" (/Libro del ábaco), publicado en 1202.

Fibonacci publicó más libros, utilizando "las nuevas mates" para resolver problemas que van desde las prácticas comerciales o el relleno y vaciado de cisternas, hasta el movimiento de los barcos.

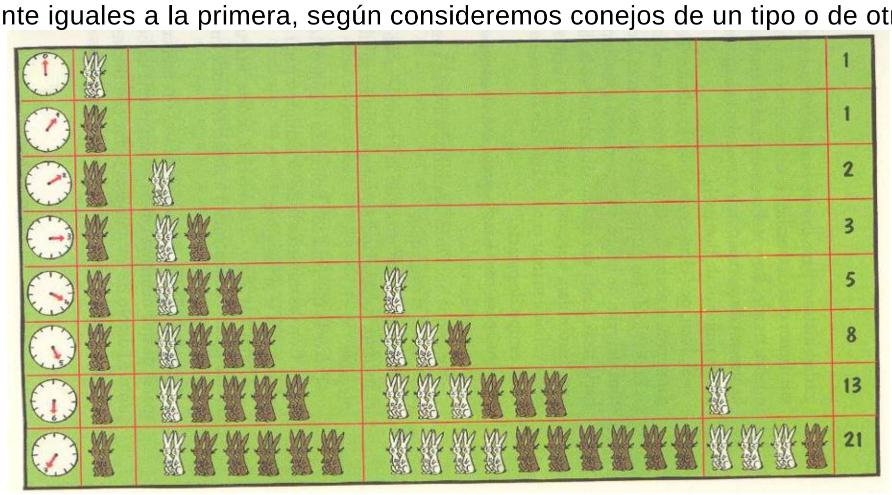
Sin embargo, el nombre de Fibonacci ha llegado hasta nosotros ligado al nombre de la sucesión de números a la que hemos aludido. En el libro "*El diablo de los números*" de Hans Magnus Enzensberger, nos explican esta sucesión de un modo muy original y que aprovechamos para acercarnos a nuestros alumnos.

3.1. ¡ A criar conejos!

"Un hombre encerró una pareja de conejos en un lugar rodeado de un muro por todas partes, y se preguntó ¿cuántas parejas tendré a partir del par original, durante un año, si considero que cada pareja engendra al mes un nuevo par de conejos que se convierten en productivos al segundo mes de vida?"

Se va razonando con los alumnos y se va obteniendo la sucesión : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, .., etc.

Si lo ven gráficamente, se pueden dar cuenta, además, de que esa sucesión incluye otras exactamente iguales a la primera, según consideremos conejos de un tipo o de otro:

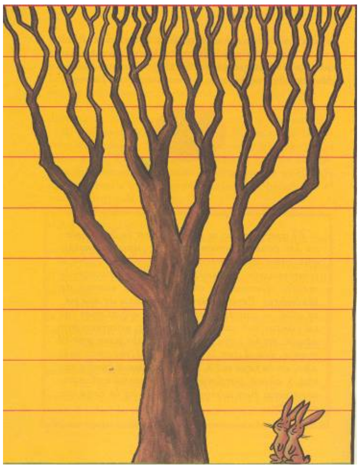


 ISSN: 1988-7922

Parejas totales	1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ….
Parejas adultas	1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ….
Parejas jóvenes	1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ….

Observamos, entonces que tenemos la definición dada para los fractales: "*un objeto que se obtiene después de un proceso de iteración infinita, es decir, después de repetir infinitamente los mismos procedimientos sobre los resultados obtenidos en la fase anterior.*"

Incluso podemos comparar situaciones teóricas, en las que aparece la sucesión de Fibonacci, con imágenes reales.



Hemos visto, entonces, los dos pilares básicos sobre los que se asienta cualquier investigación y, por ende, cualquier avance matemático.

Gráficamente podemos presentarlo de la siguiente forma:

OBSERVACIÓN de la realidad que nos rodea —— RESULTADOS MATEMÁTICOS TEÓRICOS

A partir de estas bases construimos los <u>nuevos elementos matemáticos</u> : LOS FRACTALES.

4. EJEMPLOS DE FRACTALES.

4.1 La sucesión, o conjunto, de Cantor.

Georg Cantor, matemático alemán (1845-1918). Junto con Dedekind fue el inventor de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas.

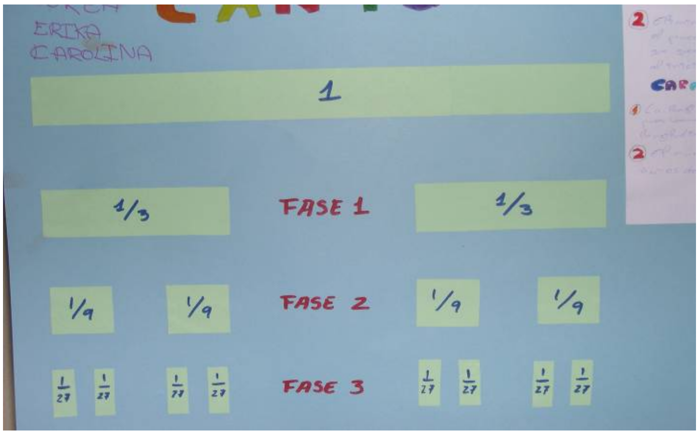
La sucesión se construye considerando los siguientes elementos:

- Un segmento de longitud 1.

- Dos segmentos de longitud $\frac{1}{3}$, resultado de dividir el primer segmento en tres partes iguales y eliminar el trozo central.

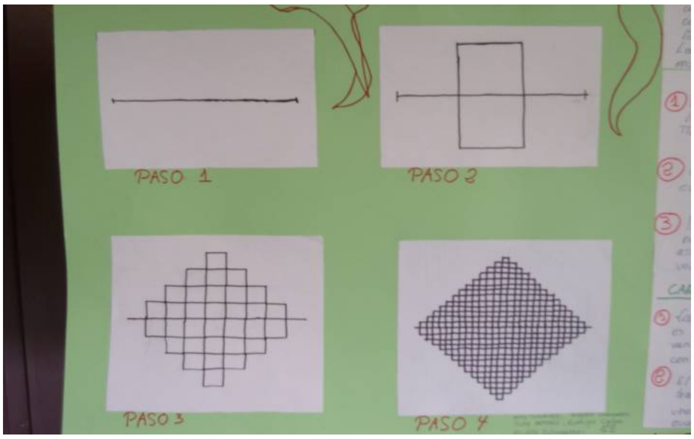
Repitiendo indefinidamente este proceso, obtenemos:ç

- Cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{9}$.
- Ocho segmentos de longitud $\frac{1}{27}$.
- Etc.



4.2- La curva de Peano.

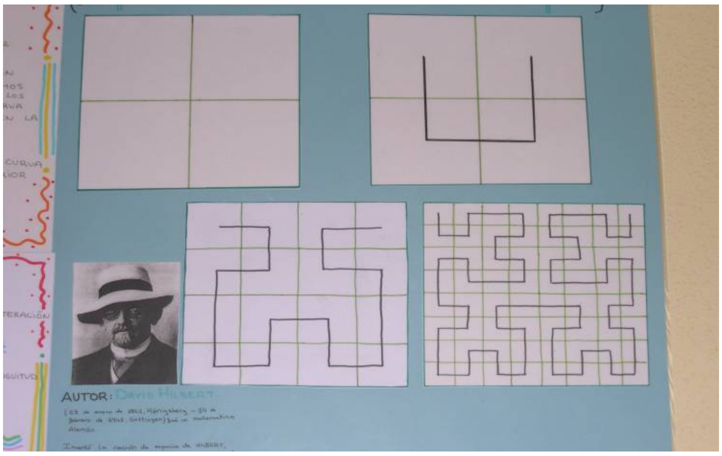
Giuseppe Peano (1858-1932), matemático y filósofo italiano. Es conocido, sobre todo, por sus contribuciones a la Teoría de Conjuntos. La mayor parte de su vida la dedicó a enseñar en Turín.



La “*curva de Peano*” consiste en construir una cuadrícula de la siguiente forma: sobre un segmento de longitud 1 se construye un cuadrado sobre el tercio central y otro cuadrado por debajo. Se repite el proceso sobre los nueve segmentos obtenidos en el paso anterior, todos ellos de longitud $\frac{1}{3}$. En el siguiente paso se vuelve a repetir el mismo proceso. Así sucesivamente.

4.3. La curva de Hilbert.

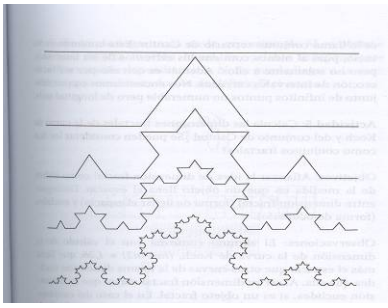
David Hilbert, matemático alemán (1862-1943). Reconocido como uno de los matemáticos más influyentes del siglo XIX y principios del XX. Adaptó y defendió vivamente la teoría de conjuntos. En 1900 presentó un conjunto de problemas que establecieron el curso de gran parte de la investigación matemática del siglo XX.



La curva de Hilbert se construye uniendo, reiteradamente, los puntos centrales de los cuadrados que se obtienen en las divisiones sucesivas de un cuadrado inicial.

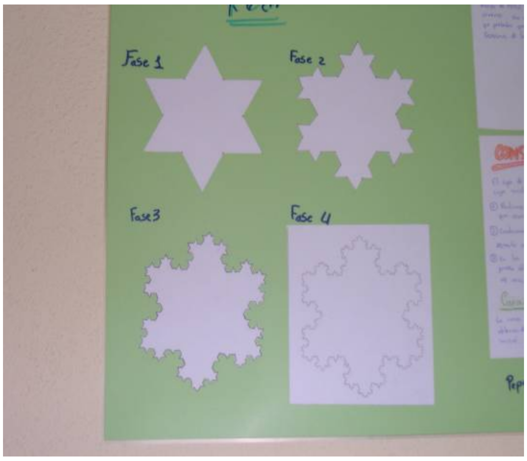
4.4. La curva de Koch y el Copo de Nieve de Koch.

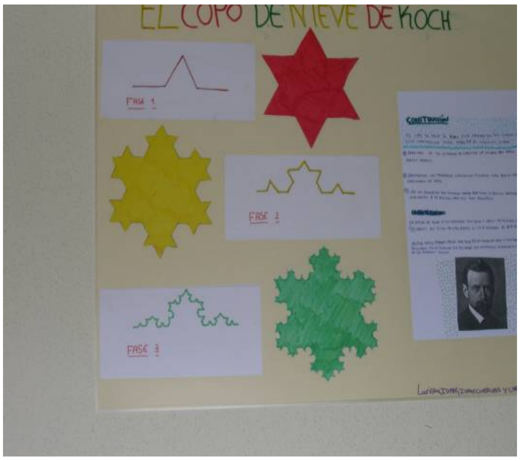
Niels Fabian Helge von Koch matemático sueco que nació en 1870 y murió en 1924. Escribió muchos artículos sobre teoría de números. Su nombre ha quedado ligado a una de las primeras curvas fractales en ser descritas.



Sobre un segmento (de longitud 1) se construye un triángulo equilátero de base el tercio central. Se elimina la base de ese triángulo.

Tenemos ahora cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{3}$, repetimos el proceso anterior sobre cada uno de esos cuatro segmentos. De esa forma se construye una curva con el aspecto de la ilustración.





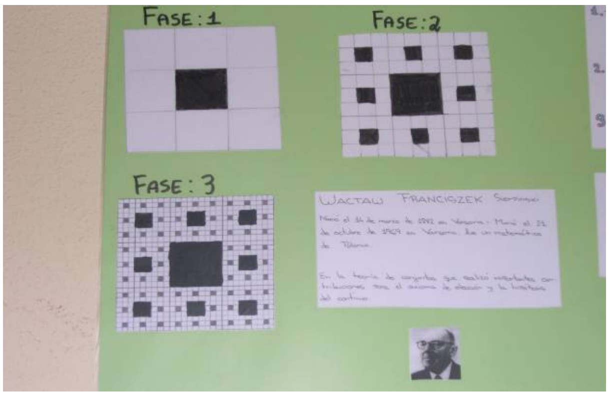
El Copo de Nieve de Koch se construye de la misma forma que la Curva de Koch, pero partiendo de un triángulo equilátero. En la ilustración de la derecha se observa la relación entre ambos.

4.5. La alfombra de Sierpinski y el triángulo de Sierpinski.

Wactaw Franciszek Sierpinski, matemático polaco (1882-1969). Trabajó principalmente en la teoría de conjuntos. Además realizó diversos estudios sobre topología y funciones de una variable real.

Las dos construcciones fractales de Sierpinski son las siguientes:

LA ALFOMBRA DE SIERPINSKI



REVISTA DIGITAL "PROGRAMAS".
CEP DE ALBACETE ISSN: 1988-7922
http://www.abceps.es/revistacep

La alformbra de Siepinski se construye coloreando el cuadrado central en una construcción de nueve cuadrados contiguos e iguales.

Sobre los ocho cuadrados blancos se repite el mismo dibujo, consiguiendo que la superficie coloreada sea cada vez mayor.

EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

La construcción de este fractal es semejante a la de la "alfombra", pero, en este caso, coloreamos el triángulo central de un triángulo equilátero dividido en cuatro *subtriángulos*. Se obtiene así una figura semejante a la anterior pero triangular en vez de cuadrangular.

5. APLICACIONES PRÁCTICAS.

Hemos visto seis ejemplos de FRACTALES, con ellos nos hemos acercado a unos nuevos ejemplos matemáticos, completando la siguiente estructura:

OBSERVACIÓN DE LA REALIDAD		RESULTADOS MATEMÁTICOS TEÓRICOS
	NUEVOS ELEMENTOS MATEMÁTICOS: ***FRACTALES***	

Solo nos queda un paso para completar el sentido real de cualquier estudio matemático: LA APLICACIÓN PRÁCTICA DE LA TEORÍA MATEMÁTICA ESTUDIADA.

En un periódico de tirada nacional (El Mundo) del 30 de Abril de 2008, nos encontramos con el artículo "*La belleza de los fractales se pone al servicio de la investigación*":

<<Los fractales pueden funcionar bien en biología, para analizar los tumores: si las células cancerosas son benignas, entonces el fractal es muy redondo; pero si el cáncer es maligno, si se extiende, el fractal será diferente. Y tenemos herramientas que miden cuál será la dimensión fractal del conjunto y determinan si el cáncer hace metástasis. Por tanto los fractales han pasado a ser una herramienta matemática de la medicina>>
Robert Devaney (Universidad de Boston)

En el mismo artículo nos enteramos de que, en España, una empresa nacida en la Universidad Politécnica de Cataluña, ha creado unas antenas fractales capaces de enlazar señales de varias bandas de telecomunicación simultáneamente.

Esto nos permite completar el esquema que deseábamos construir:

Observación de la REALIDAD

Base teórica MATEMÁTICA s. XIII

Nuevos elementos MATEMÁTICOS s. XIX y s. XX

APLICACIONES PRÁCTICAS A OTRAS CIENCIAS S. XXI

A LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA: ESTE DESCUBRIMIENTO ES AHORA VUESTRO ¡NO DEJEIS DE UTILIZARLO!

■ **Autoría**
Purificación Resco Martín. Profesora de Enseñanza Secundaria.

Datos de contacto:
CENTRO: **IES Arcipreste de Hita (Azuqueca de Henares. Guadalajara)**
TFNO: **949 26 04 32**
CORREO: **Avd. Poeta Manuel Martínez nº 4. 19200**
PÁGINA WEB: