

# Competencias Argumentativas y Comunicativas en Alumnos de ESO al Trabajar Problemas de Geometría con Software Dinámico

Autoría: María Sotos Serrano y M<sup>a</sup> José Haro Delicado

Temática: Desarrollo de competencias al introducir software dinámico en el aula.

**Palabras clave:** Argumentación, Comunicación, software dinámico, Educación Secundaria Obligatoria

## Resumen

Hoy en día, la tecnología empieza a ocupar un importante papel en educación y particularmente en Educación Secundaria. Utilizar tecnología sólo porque esté de moda puede no ser una buena idea y, de todas formas, la tecnología puede ser contraproducente si no se utiliza de la forma adecuada. De ahí la importancia de que nos aseguremos de que procediendo de una determinada forma vamos a cubrir los objetivos propuestos y vamos a facilitar y mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje. En este trabajo presentamos las diferentes formas de proceder de estudiantes de 4<sup>o</sup> de ESO al resolver problemas de geometría con la ayuda de software dinámico. Nos ha interesado el desarrollo de su forma de argumentar y de su capacidad para comunicar los resultados y conclusiones de su trabajo. Hemos preparado diversas actividades que habían de resolver apoyándose en un software dinámico fácil de adquirir, instalar y manejar, con la ventaja adicional de ser de uso libre, GeoGebra.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las tecnologías de la información y la comunicación son cada vez más importantes en nuestra sociedad y, por lo tanto, se incluyen en el desarrollo de una metodología de enseñanza-aprendizaje. Considerando este hecho y con el objetivo de crear un entorno de aprendizaje donde se favorezcan procesos de construcción matemática, así como las competencias argumentativas y comunicativas de nuestros estudiantes, planteamos una serie de actividades de geometría plana, para trabajar con estudiantes de 4<sup>o</sup> de la ESO usando software dinámico (GeoGebra). Pretendemos observar sus procesos de razonamiento y construcción y comunicación de resultados. Creemos que las características de interacción y visualización de este software favorecerán el desarrollo de las capacidades relacionadas con los citados procesos.

Se presentan algunas de las actividades preparadas para realizar este estudio. Para resolverlas, nuestros estudiantes han debido buscar generalizaciones, plantear situaciones relacionadas, buscar patrones, establecer conjeturas,...En una palabra, investigar. Al terminar la realización de las actividades han debido elaborar un informe en el que argumentar lo realizado para apoyar y evidenciar sus conclusiones y resultados. Se presentan algunos de los resultados en cuanto a la forma de resolver los problemas.

Este trabajo forma parte de un estudio más amplio en el que se pretende analizar si el uso de software de geometría dinámica favorece las competencias argumentativas y comunicativas de estudiantes de ESO, gracias a la visualización y dinamismo del software utilizado. Nos interesa también estudiar si mejoran los niveles de razonamiento en el trabajo de la geometría plana.

## 2. OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Nos planteamos este trabajo con el fin de responder las siguientes preguntas:

Competencias argumentativas y comunicativas en alumnos de ESO al trabajar problemas de geometría con software dinámico

1. ¿Favorecen las características gráficas y dinámicas del software educativo el desarrollo de las competencias argumentativas?
2. ¿Promueven la reflexión y el razonamiento?
3. ¿Potencian la construcción de contenido matemático?

Nuestros objetivos son los siguientes:

- Favorecer el uso del conocimiento previo y promover el reconocimiento de su uso y utilidad.
- Relacionar contenido matemático.
- Potenciar la reflexión y el razonamiento como forma de entender las exigencias del problema y el desarrollo de ideas propias.
- Evidenciar la necesidad de generalizar y justificar resultados.
- Favorecer el desarrollo cognitivo a través de la visualización y manipulación de los elementos del problema.
- Utilizar diferentes formas de representación y las relaciones entre ellas con el fin de favorecer la comprensión de los elementos constituyentes del problema.
- Favorecer el desarrollo de la creatividad y la imaginación.
- Promover la búsqueda de soluciones sencillas.
- Favorecer que el alumno adquiera conocimiento por sí mismo (¿carácter antiautoritario del aprendizaje con software dinámico?)
- Utilizar el error como herramienta que promueve el razonamiento y la comprensión.
- Promover el planteamiento de preguntas y animar a la búsqueda de respuestas.
- Desarrollar las habilidades comunicativas de los estudiantes a través del lenguaje natural, simbólico y gráfico.

### **3. METODOLOGÍA**

Para lograr alcanzar los objetivos propuestos y poder dar respuesta a nuestras preguntas de investigación, hemos preparado unas actividades de geometría plana para trabajar en el aula utilizando el software dinámico Geogebra. El trabajo se ha desarrollado en el IES Al-Basit con alumnos de 4º de la ESO.

Hemos escogido este software por su gran potencia, facilidad de uso, características gráficas y dinámicas y también porque es un software libre que se descarga con gran facilidad desde cualquier ordenador. De esta forma, los estudiantes también pueden trabajar en casa.

Se ha dado a los estudiantes una breve introducción al manejo y posibilidades del software, con el fin de que se pudieran desenvolver con él con una relativa facilidad y no se vieran limitados en el desarrollo de sus ideas por el desconocimiento de las características y propiedades del mismo que, por otra parte, son muchas y muy útiles para el desarrollo de las actividades preparadas. No queríamos que no se alcanzaran los objetivos propuestos porque

Competencias argumentativas y comunicativas en alumnos de ESO al trabajar problemas de geometría con software dinámico

los estudiantes carecieran de la información suficiente y ello les impidiera utilizarlo de la manera apropiada.

El trabajo se desarrolló fuera del horario lectivo para no interferir con el desarrollo del currículo ordinario y con el aliciente de una mejora en la calificación final. Ello hizo que los estudiantes se mostraran más colaboradores.

Cada estudiante disponía de un ordenador y las actividades se realizaron individualmente. Durante el desarrollo del trabajo se formularon preguntas en voz alta, tanto por parte de los estudiantes como de las profesoras, y cualquier alumno podía intentar responderlas.

Al final se expusieron los logros y resultados obtenidos, así como el camino seguido para ello, con el fin de ponerlos en común y llegar a conclusiones generales. Se discutió lo desarrollado por todos y los estudiantes argumentaron apoyando o refutando las ideas de los demás y defendiendo las propias. Se pretendía que todos aprendieran de todos y con todos.

#### 4. ACTIVIDADES

Presentamos a continuación tres de las actividades propuestas a los estudiantes, así como las diferentes formas de resolución utilizadas por ellos. Con todas ellas pretendíamos trabajar los objetivos presentados en el epígrafe 2. No intentábamos desarrollar unos contenidos concretos, dado que las actividades eran abiertas y no pretendíamos poner límite a las posibles ideas desarrolladas por nuestros estudiantes. En todos los casos, la resolución de las mismas implicaba la aplicación de algoritmos y la manipulación de símbolos, así como la conexión e integración de conceptos y procedimientos.

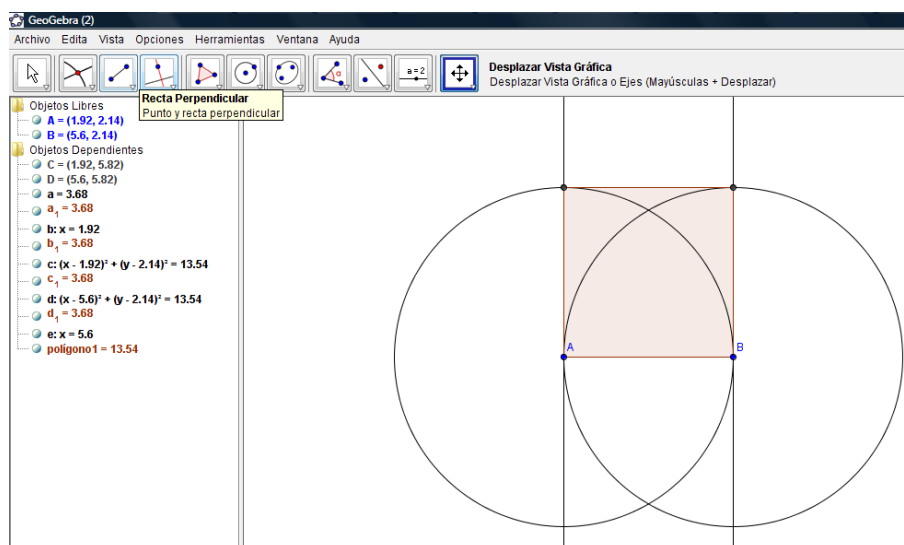
##### Actividad nº 1.

Construye un cuadrado a partir de uno de sus lados.

Dibuja un segmento AB e intenta idear un procedimiento para construir un cuadrado de lado AB. Explica detalladamente el procedimiento desarrollado y por qué crees que es correcto. ¿Cuáles son las dificultades con las que te has encontrado? ¿Cómo las has superado?

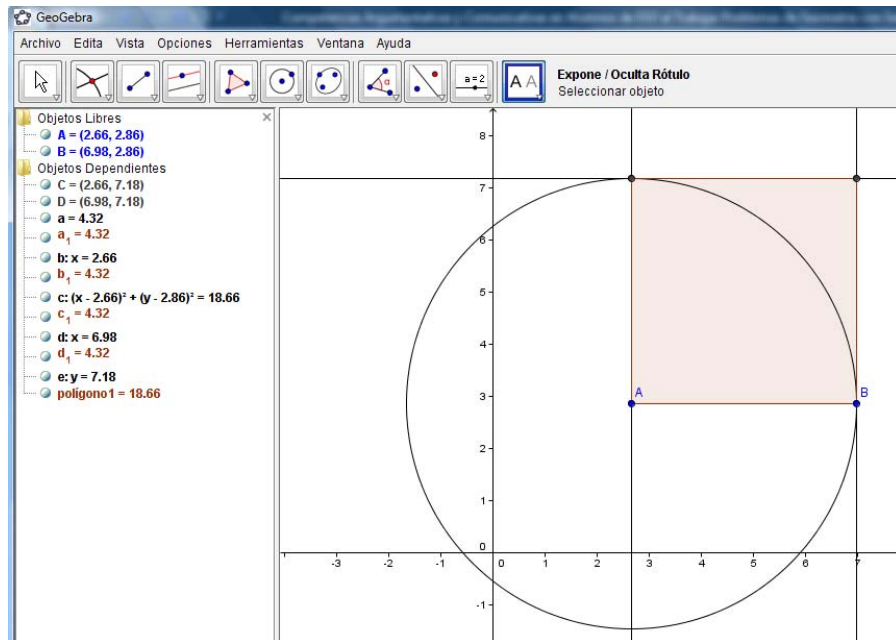
*Procesos de resolución desarrollados por los alumnos*

1. A partir del segmento AB dibujaron dos circunferencias de radio AB tomando como centro A y B, respectivamente. Trazaron perpendiculares al segmento por A y por B y unieron los puntos de corte con las circunferencias.

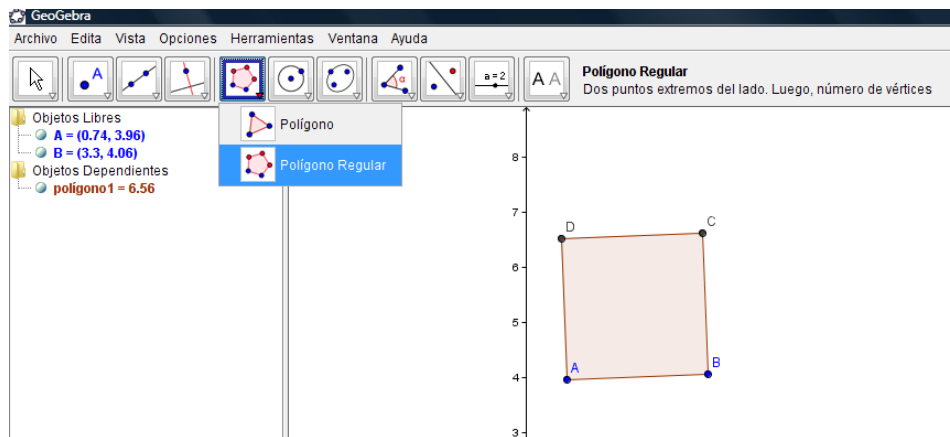


Competencias argumentativas y comunicativas en alumnos de ESO al trabajar problemas de geometría con software dinámico

2. A partir del segmento AB construyeron una circunferencia de radio AB con centro en A. Posteriormente, trazaron dos rectas perpendiculares al segmento AB por A y por B. Finalmente trazaron una recta paralela a AB desde el punto de corte con la circunferencia de la recta trazada por A.

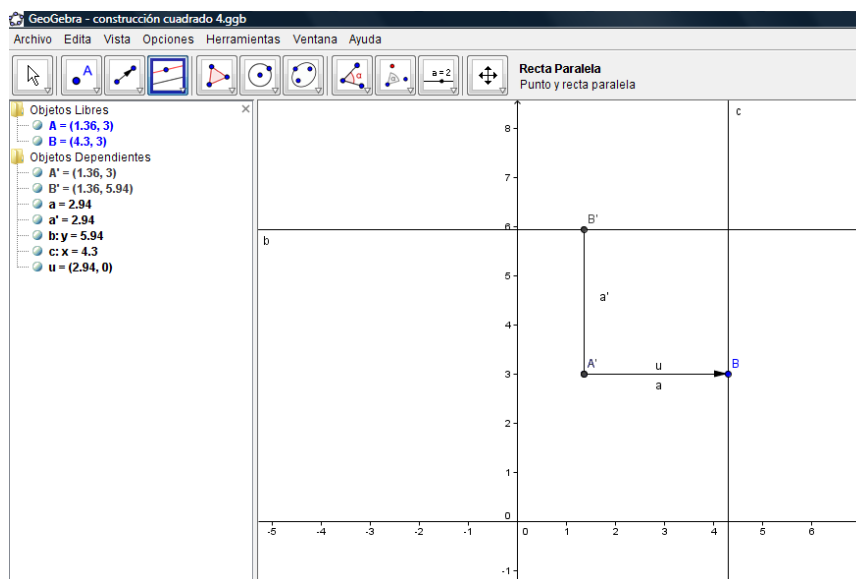


3. Construcción del cuadrado a partir de las opciones del programa.



4. Trazado del segmento AB. Trazado de un vector de origen un punto A y extremos el otro punto B. Uso de la opción "rota objeto en torno a un punto y un ángulo indicado". Trazado de paralelas a los dos lados formados por los puntos extremos.

## Competencias argumentativas y comunicativas en alumnos de ESO al trabajar problemas de geometría con software dinámico



### *Nociones matemáticas que los alumnos creen haber desarrollado*

- Noción de segmento, circunferencia, cuadrado y recta.
- Perpendicularidad y paralelismo.
- Relación entre el cuadrante de una circunferencia de radio el lado del cuadrado y el propio cuadrado.
- Intersección de recta y curva.
- Condiciones que debe cumplir un cuadrilátero para ser un cuadrado.
- Construcción de una circunferencia de radio y centro dados.
- Noción de vector y giro.

### **Actividad nº 2.**

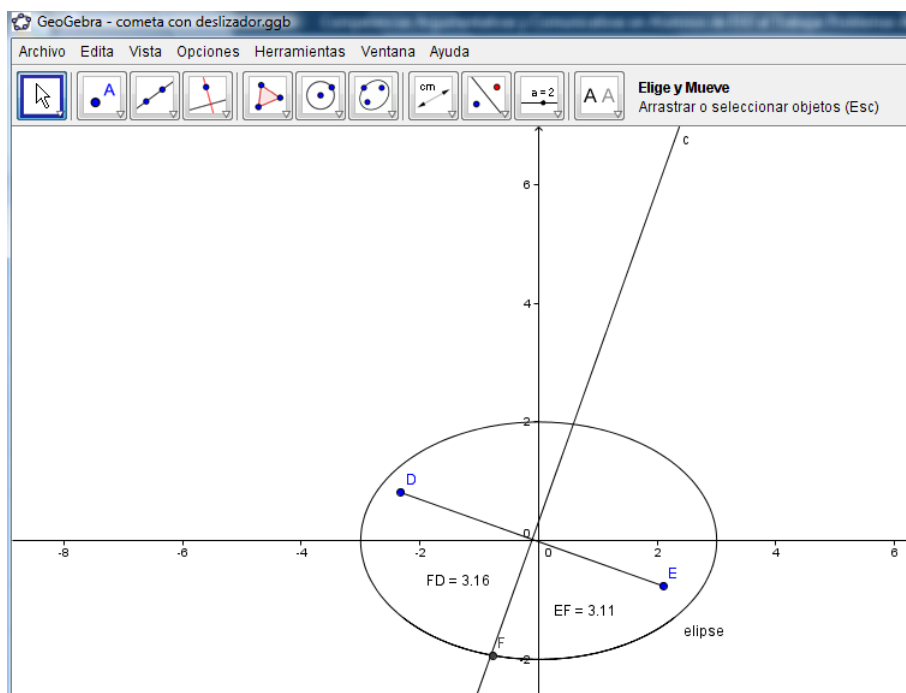
Satélites. Disponemos de dos satélites cuya misión es estudiar un cometa. Se encargará de la misión el satélite que en cada caso se encuentre más cercano al cometa. ¿En qué zona de la órbita lo estudiará cada uno de ellos?

#### *Procesos de resolución desarrollados por los alumnos*

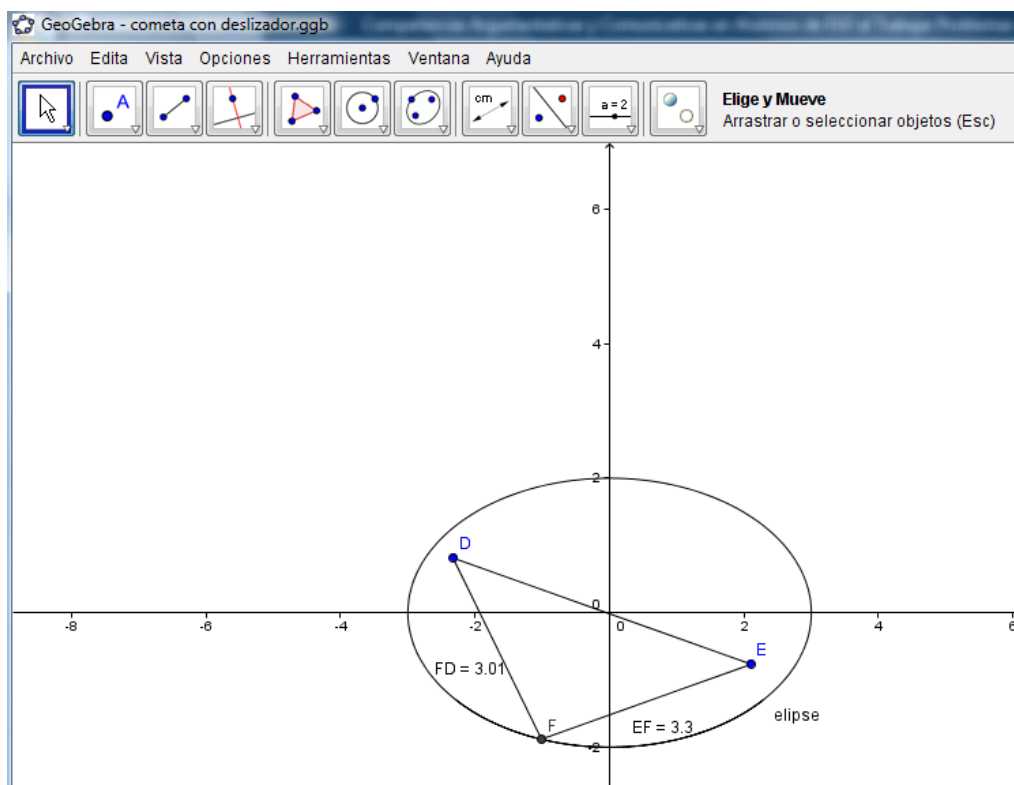
1. Representación de la elipse utilizando las opciones de Geogebra y de dos puntos dentro de la misma que simularán la posición de los satélites. Trazar un punto sobre la elipse que representará al cometa. Obtener las distancias desde el cometa a cada satélite. Mover el punto a través de su órbita y observar.

Al manipular el punto algunos alumnos han llegado a la conclusión de que el cometa podía ser observado por ambos satélites a la vez cuando se encontraba sobre la mediatriz del segmento determinado por ambos satélites. Según el cometa quedara a la derecha o a la izquierda de la mediatriz, el cometa debía ser observado por el satélite que se encontrara en esa misma zona.

Competencias argumentativas y comunicativas en alumnos de ESO al trabajar problemas de geometría con software dinámico



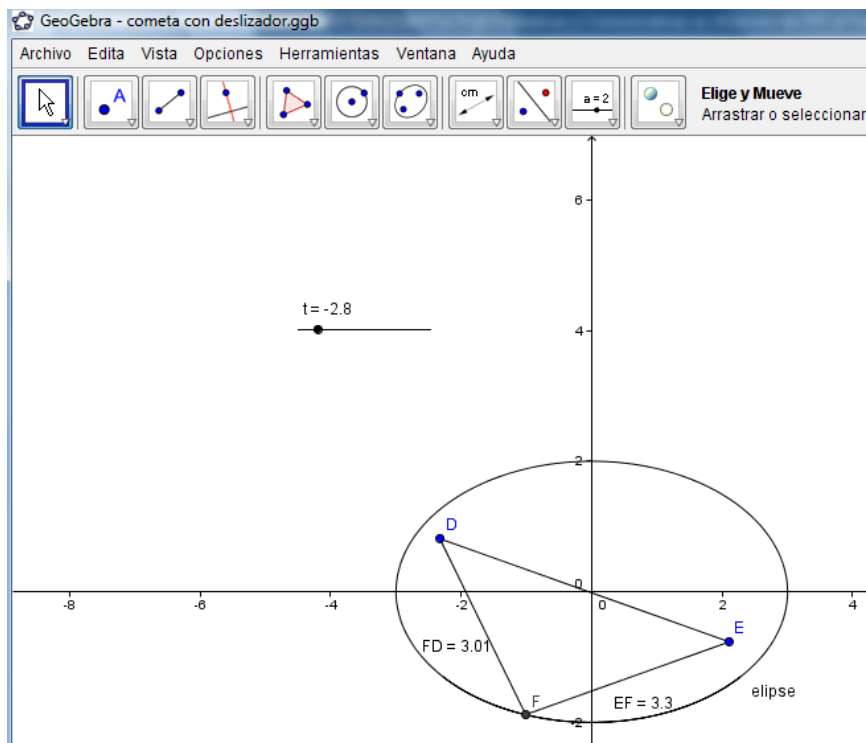
2. Los estudiantes han procedido de igual manera que antes, sólo que en vez de pensar en la mediatriz como línea divisoria han construido un triángulo con vértices en el cometa y los dos satélites y han comprobado que la igualdad de distancias se daba cuando el triángulo era isósceles



3. Los estudiantes que entrarían en esta tercera forma de actuar han procedido de manera muy similar a la anterior sólo que han utilizado una de las opciones del programa que ha

Competencias argumentativas y comunicativas en alumnos de ESO al trabajar problemas de geometría con software dinámico

sido la de utilizar un deslizador, que les ha permitido simular el desplazamiento del satélite de manera continua, sin necesidad de mover a mano el punto que lo representaba.

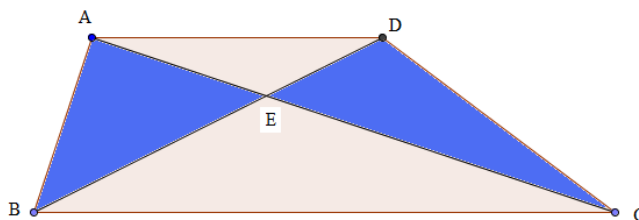


*Nociones matemáticas que los alumnos creen haber desarrollado*

- Órbitas de los cuerpos celestes.
- La elipse, sus elementos y formas de construirla.
- Distancia entre puntos y equidistancia
- Triángulo isósceles
- Mediatriz de un segmento

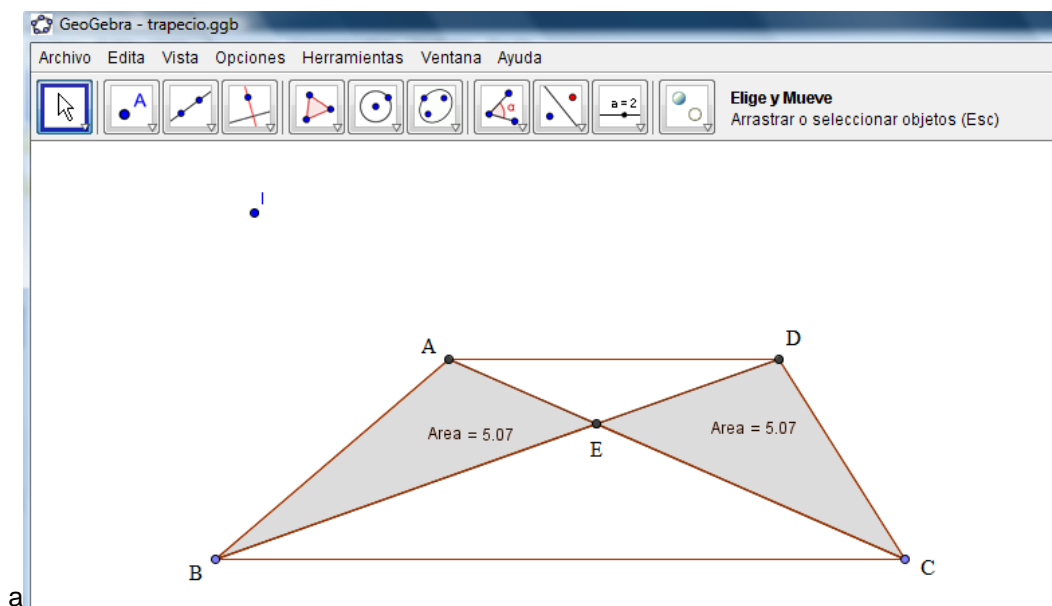
### Actividad nº 3.

Triángulos en el trapecio. En un trapecio cualquiera ABCD, de bases AD y BC, donde E es la intersección de las diagonales ¿Existe alguna relación entre los triángulos AEB y DEC? Razona y justifica la respuesta.



*Procesos de resolución desarrollados por los alumnos*

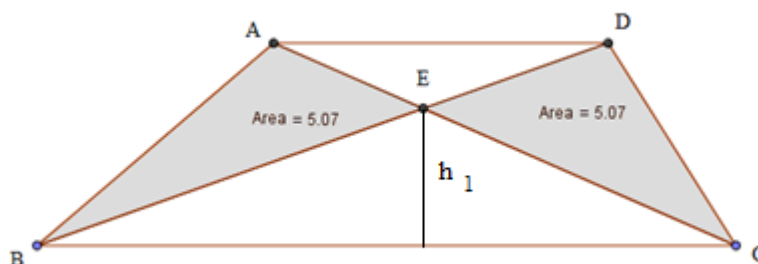
1. Dibujar un trapecio y calcular las áreas de los triángulos coloreados.



Manipulando pudieron obtener todo tipo de trapezios y comprobar que las áreas de los triángulos considerados siempre coinciden. Había que justificar el resultado y generalizarlo de forma no hubiera duda ninguna sobre su veracidad.

## 2. Dibujar un trapezio y calcular las áreas. Demostración analítica

Estos alumnos añadieron a la forma de proceder anterior una demostración analítica como la que se muestra a continuación. Esta demostración surgió de la manipulación visual de la imagen.



$$\widehat{DRC} = \widehat{DBC} - \widehat{BEC} = \frac{B \cdot h}{2} - \frac{B \cdot h_1}{2} = \frac{B(h - h_1)}{2} \quad (1)$$

$$\widehat{ABB} = \widehat{BAC} - \widehat{BEC} = \frac{R \cdot h}{2} - \frac{R \cdot h_1}{2} = \frac{R(h - h_1)}{2} \quad (2)$$

### Observaciones

- Las primeras dificultades surgieron al dibujar el trapezio. Para ello tenían que tener muy clara la noción de trapezio y las propiedades que lo caracterizan. Como se pretendía poder manipular la imagen obtenida con el fin de trabajar con cualquier tipo de trapezio y poder generalizar los resultados que se obtuvieran, tuvieron que ser muy cuidadosos para no trazar todos los vértices sobre elementos fijos que no se pudieran desplazar.



## Competencias argumentativas y comunicativas en alumnos de ESO al trabajar problemas de geometría con software dinámico

- El intento de generalización llevó a manipular la imagen para pasar por una gran diversidad de trapecios, lo que llevó también a tratar con los casos particulares como el romboide y el rectángulo deteniéndose en sus propiedades.
- La consideración de las características del trapecio llevó a intentar ampliar el problema tratando con otro tipo de cuadriláteros como los trapezoides.
- Se buscó caracterizar la demostración como instrumento necesario para evidenciar resultados que son válidos en todos los casos y que, por lo tanto, no necesita de ulteriores comprobaciones.

### *Nociones matemáticas que los alumnos creen haber desarrollado*

- El trapecio como cuadrilátero. Definición, elementos y propiedades.
- Paralelismo de rectas.
- Área de un triángulo. Triángulos distintos con áreas iguales.
- Descomposición de áreas.
- Diferencia entre demostrar y comprobar.
- La importancia y necesidad de las demostraciones como forma de evidenciar argumentos y generalizar resultados.
- Diferencia entre evidencia visual y justificación lógico- deductiva.

## **5. CONCLUSIONES**

Aunque no se ha realizado más que un pequeño estudio piloto, creemos que la respuesta a todas nuestras preguntas es afirmativa. Nos ha sorprendido la gran variedad de ideas que han surgido y cómo los estudiantes han sabido desarrollarlas manipulando el software dinámico. Sobre todo, la ejecución de las mismas y la visualización de los resultados les han permitido corregir errores y encontrar el camino para seguir adelante. Han necesitado echar mano de lo aprendido con anterioridad y de una gran dosis de reflexión y razonamiento para ser conscientes de lo que les pedía el problema y encontrar una vía de resolución del mismo. El ejercicio de reflexión ha debido continuar hasta el final, a la hora de analizar lo que habían aprendido y desmenuzar las ideas desarrolladas. Se han sentido muy satisfechos porque han podido obtener resultados por sí mismos y han sido capaces de transmitirlos y convencer a los demás de su corrección y validez. Han perdido el miedo a equivocarse y a exponer sus ideas, aún a riesgo de que no fueran correctas, puesto que han sentido que todos estaban en la misma situación y que se trataba de aprender juntos, beneficiándose de las ideas desarrolladas por el conjunto de la clase. A la hora de explicar lo realizado se han sentido muy arropados por la posibilidad de mostrar sus ideas mediante las características gráficas y manipulativas del software. Podían mostrar dinámicamente lo que pretendían decir y ello les ha ayudado a argumentar mejor.

Uno de los inconvenientes ha sido la gran cantidad de tiempo que ha habido que dedicar al trabajo en el aula. La potencialidad de este tipo de herramientas requiere un trabajo de aprendizaje previo, mínimamente exhaustivo, que permita al alumnado el uso completo del software, para que sus ideas no se vean limitadas por el desconocimiento de sus posibilidades.

Estamos realizando un diseño experimental de investigación para ejecutarlo con el mismo tipo de alumnos, y con estas y otras actividades similares que nos permitirían responder con más rigor a las preguntas planteadas al principio.

## **6. REFERENCIAS**

## Competencias argumentativas y comunicativas en alumnos de ESO al trabajar problemas de geometría con software dinámico

Andriessen, J., Baker, M. y Suthers, D. (2003). Argumentation, Computers Support and Educational Context of Confronting Cognitions. En J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (Eds.), *Arguing to Learn: Confronting Cognition in Computer-Supportes Collaborative Learning Environment* (pp. 1-25). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Christou, C. et al. (2004). Proofs through Exploration in Dynamic Geometry Environments. *International Journal of Science and Mathematics Education*. Volumen 1, Número 2. (pp. 339-352). Taiwan.

Cobo, P. y Fortuny, J. M. (2007): AgentGeom: Un sistema tutorial para el desarrollo de competencias argumentativas de los alumnos a través de la resolución de problemas. *Matematicalia*. Volumen 3, Número 3.

Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2005). Atribuir un significado a la matemática a través de la visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2). (pp. 217-226).

Goldin, G. A. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical problem Solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 125-145). New Jersey.

Hadas, N. y Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2000). The role of contradictions and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometric environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2). (pp. 127-150).

Iranzo, N. Y Fortuny, J.M. (2008). La influencia de SGD en las estrategias de resolución de problemas de geometría analítica. *Investigación en Educación Matemática XII SEIEM*. (pp. 321-348).

Jermann, P. y Dillenbourg, P. (2003). Elaborating new arguments through a CSCL script. En J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (Eds.), *Arguing to Learn: Confronting Cognition in Computer-Supportes Collaborative Learning Environment*. (pp. 205-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Koschmann, T. (2003). CSCL, Argumentation, and Deweyan Inquiry. En J. Andriessen, M. Baker y D. Suthers (Eds.), *Arguing to Learn: Confronting Cognition in Computer-Supportes Collaborative Learning Environment*. (pp. 261-269). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. y Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Hanbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, Present and Future*. (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1/2). (pp. 25-53).

Palais, R. (1999). The Visualization of Mathematics: Towards a Mathematical Exploratum. *Notices of the AMS*. Volumen 46, Número 6. (pp. 647-658).

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 125-154). Barcelona.

### **Autoría**

María Sotos Serrano, profesora Titular de Escuela Universitaria

Datos de contacto:  
Escuela Universitaria de Magisterio  
Plaza de la Universidad sn

Competencias argumentativas y comunicativas en alumnos de ESO al trabajar problemas de geometría con software dinámico

967599200 ext 2515  
[María.sotos@uclm.es](mailto:María.sotos@uclm.es)

M<sup>a</sup> José Haro Delicado.  
IES Al-Basit. Profesora de matemáticas y Jefe del Departamento de Matemáticas  
Profesora Asociada de la Escuela Superior de Ingeniería Informática de la UCLM en Albacete  
(Departamento de Matemáticas)

Datos de contacto:  
IES Al-Basit avda. de España 42 02006 Albacete  
967228716 o 649339565  
[iesalbasit@iesalbasit.es](mailto:iesalbasit@iesalbasit.es) o [mariajose.haro@uclm.es](mailto:mariajose.haro@uclm.es)