Introducción al Cálculo de variaciones para estudiantes de primer curso de Ingenierías

Autoría: Mª José Haro Delicado y Mª José Pérez Haro

Temática: Introducción al Cálculo de Variaciones a través de la resolución de problemas clásicos de la física.

Palabras clave: Cálculo de variaciones, ecuaciones diferenciales, braquistócrona.

Resumen:

Pretendemos introducir de manera sencilla a estudiantes de primer curso de ingenierías en el Cálculo Variacional. Generalmente, los estudiantes ven la teoría aislada de las situaciones que la justifican. También, los problemas que resuelven suelen estar desligados de casos reales. En Bachillerato, trabajan con problemas de cálculo de óptimos de funciones de una variable, sujetas a condiciones representadas por ecuaciones lineales o cuadráticas. Se trata de extender este tipo de problemas y trabajar con funciones de funciones (funcionales), de manera que los universitarios manejen ejemplos que representaron, en un momento dado de la historia de las matemáticas, un desafío para los estudiosos de la época, y encuentren un significado práctico a su estudio. Tratar con conceptos algo elevados para el nivel de los estudiantes ha hecho necesario seleccionar y adaptar mucho los problemas y actividades para que sirvan como introducción comprensible a conceptos y métodos propios del cálculo variacional y puedan ser resueltos desde sus conocimientos previos, entre los que se encuentran los métodos básicos de resolución de ecuaciones diferenciales. Nos apoyamos también en herramientas dinámicas (GeoGebra), capaces de simular procesos útiles para comprender mejor y afianzar los conceptos trabajados.

1. INTRODUCCIÓN

"Ya que la fábrica del universo es más que perfecta y es el trabajo de un Creador más que sabio, nada en el universo sucede en el que alguna regla de máximo o mínimo no aparezca".

Leonhard Euler

El objetivo de esta introducción es el de tratar con conceptos básicos del cálculo variacional procurando presentar diferencias y similitudes con contenidos previos que ya han sido adquiridos por lo estudiantes. Se presenta la idea de funcional comparándola con la idea de función, así como diversos ejemplos muy sencillos en los que aparecen funcionales. Se termina con un ejemplo, como es el de la longitud de un arco de curva que les permite utilizar conocimientos adquiridos en segundo de Bachillerato. En este documento, por limitación de espacio, se ofrecen sólo unos pocos de los ejemplos y aplicaciones que hemos trabajado.

1.1. Desarrollo de la introducción

Conjuntamente con los problemas en que es necesario determinar los máximos y mínimos de cierta función y=f(x), con frecuencia surgen problemas físicos en los que es necesario hallar los valores máximo y mínimo de un tipo especial de magnitudes, llamadas funcionales.

Se llama funcionales a un determinado tipo de funciones cuyos valores se determinan a partir de los valores de otras funciones, son "funciones de funciones" o tipos de funciones en los que la variable independiente es una función. En el caso de las funciones, a cada número le corresponde otro número. En el caso de las funcionales, **a cada función le corresponde un número.**

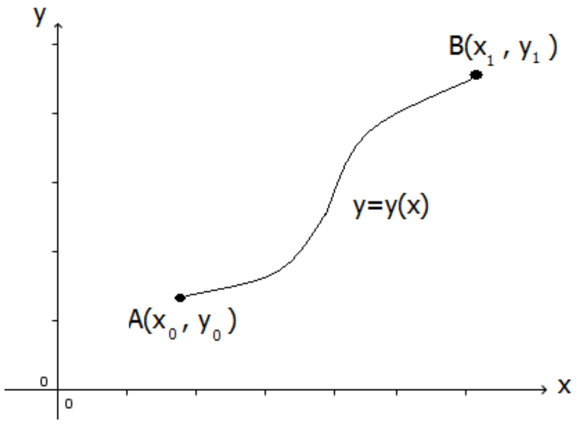
Ejemplo 1: Sea M= C [0,1] el conjunto de todas las funciones continuas *y*(*x*) definidas en [0,1], y sea $J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx$. $J[y(x)]$ es una funcional que a cada función *y*(*x*)$\in$C [0,1] le asocia un valor determinado por $J[y(x)]$.

$$\text{Si } y(x)=x^2,\ J[y(x)] = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

$$\text{Si } y(x)=\sin(\pi x),\ J[y(x)] = \int_0^1 \sin \pi x dx = \left[\frac{-\cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}. \tag{2}$$

$$\text{Si } y(x) = e^{2x} - 1,\ J[y(x)] = \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - x\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2} \tag{3}$$

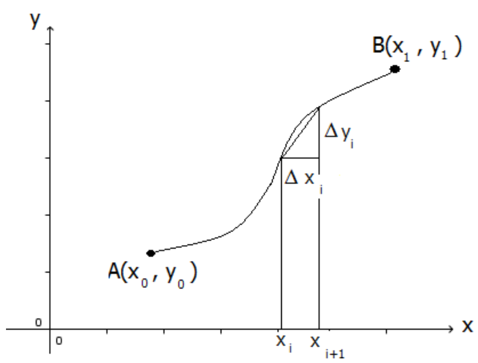
Ejemplo 2: La longitud *l* de un arco de curva plana que une dos puntos dados $A(x_0, y_0)$ y $B(x_1, y_1)$ es una funcional.



La magnitud *l* puede calcularse si se da la ecuación de la curva, *y*=y(*x*). De este modo:

$$l[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \tag{4}$$

¿Por qué es esto así?



La longitud aproximada del segmento de curva comprendido entre x_i y x_{i+1} es:

$$L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2}{(\Delta x_i)^2} + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}\,\Delta x_i \qquad (5)$$

Una primera aproximación de la longitud viene dada por:

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}\,\Delta x_i \qquad (6)$$

Y el valor exacto de la longitud del arco:

$$L = \lim_{\Delta x_i \to 0} L_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}}\,\Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(\alpha_i)\right)^2}\,\Delta x_i = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx \quad \text{con } \alpha_i \in [x_i, x_{i+1}]. \qquad (7)$$

Vamos a trabajar con este tipo de expresiones que, por otra parte, desempeñan un muy importante papel en el terreno de la física y de las matemáticas aplicadas.

Una de las ramas más desarrolladas del trabajo con funcionales es el llamado “Cálculo Variacional” o “Cálculo de Variaciones” que tiene que ver con la búsqueda de máximos y mínimos de funcionales.

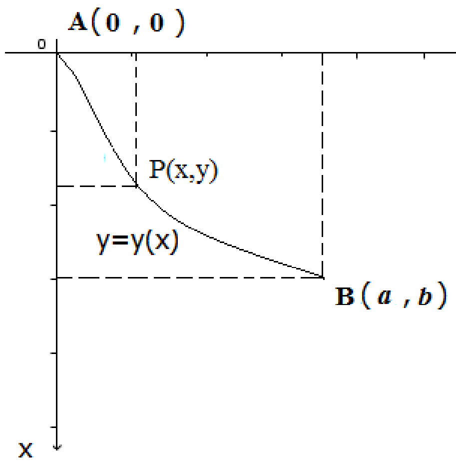
1.2. Breve introducción histórica al cálculo de variaciones

Se considera de una gran importancia que los estudiantes encuentren que lo que estudian es útil y que tiene sentido su aprendizaje. Por ello se hace necesario citar el momento histórico en el que se empezaron a desarrollar los contenidos objeto de estudio, así como los personajes implicados en su desarrollo, los problemas que se resolvieron con ellos y sus implicaciones en el avance del conocimiento humano y de la ciencia. De los tres problemas presentados en esta breve introducción histórica se tratará más a fondo, con posterioridad, el primero (problema de la braquistócrona). El tercero de ellos (problema isoperimétrico) no se presenta en este documento por cuestiones de espacio. El problema de la braquistócrona se desmenuza ya un poco en esta introducción con el fin de manejar las ideas ya introducidas y puesto que ello es posible con los cocimientos previos que ya tienen los estudiantes de estos niveles.

<u>Breve introducción histórica al cálculo de variaciones.</u> El cálculo de variaciones surgió en el siglo XVIII y fueron Euler y Lagrange los que lo convirtieron en una teoría matemática rigurosa. Tras algunos trabajos previos, Euler publicó en 1744 el libro *Método de búsqueda de líneas curvas con propiedades de máximo o mínimo, o la resolución del problema isoperimétrico tomado en su sentido más amplio*, que es el primer libro en la historia sobre cálculo de variaciones. Con solo 19 años, Lagrange se interesaba ya por los trabajos de Euler sobre los problemas de extremos, y en particular por los problemas isoperimétricos (entre todas las curvas cerradas en el plano de perímetro fijo, ¿qué curva (si la hay) maximiza el área de la región que encierra?). Habiendo comprobado que los métodos de Euler en el cálculo de variaciones eran excesivamente complicados, tratándose de un tema de análisis puro, Lagrange desplaza las consideraciones geométrico-analíticas de Euler para sustituirlas por un método puramente analítico y un simbolismo más apropiado. En 1755, describe en una carta dirigida a Euler su método, al que llama “Método de variación”, pero que Euler denominará “Cálculo de variaciones”. Su método puede ilustrarse a partir del problema fundamental de hacer máxima o mínima la integral $A = \int_{x_1}^{x_2} Z\,dx \quad \textbf{donde} \quad Z = f(x, y, y')$

El método de variaciones se aplicó, tras su descubrimiento, sobretodo en física, especialmente en mecánica, y llegó a ser una disciplina matemática independiente, con métodos propios de investigación. Los tres problemas siguientes tuvieron una gran importancia en el desarrollo del cálculo variacional.

Problema de la braquistócrona (breve tiempo): En 1696, Johann Bernoulli publicó una carta, dirigida a los matemáticos de la época, proponiendo un problema sobre las líneas de deslizamiento más rápidas, o braquistócronas. En este problema se exige determinar la línea que une dos puntos dados A y B, que no pertenecen a una misma recta vertical, de manera que una partícula se deslice por dicha línea desde el punto A hasta el punto B en el menor tiempo posible.

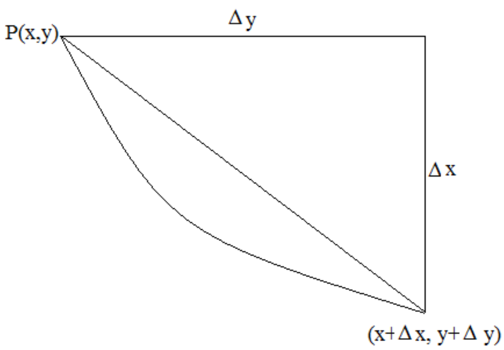


Se puede pensar sobre cuál será la línea de deslizamiento más rápido, llegando a la conclusión de que no será la recta que une los dos puntos (la distancia más corta entre dos puntos es la recta), ya que al moverse por la recta, la velocidad aumentará con una cierta lentitud. Previamente al planteamiento del problema por parte de Johann Bernoulli, Galileo ya pensaba que el tiempo sería menor si el camino se curvaba tomando la forma de un arco de circunferencia, puesto que si se toma una curva que baje más bruscamente cerca del punto B, aunque el camino se alargue, una buena parte del mismo será recorrido con mayor velocidad. Fueron varios los matemáticos que encontraron la respuesta, entre los que cabe destacar a los hermanos Bernoulli, Leibnitz, Newton y L´Hôpital. Concretamente, Newton consideró el problema de encontrar la braquistócrona asociada con la construcción de túneles a través de La Tierra conectando puntos fijos.

Consideremos el problema más de cerca: Sea s la longitud del arco de curva que une A con P, la velocidad de la partícula en el punto P será $v = \frac{ds}{dt}$, de donde se obtiene $dt = \frac{ds}{v}$, por lo que el tiempo que tarda en desplazarse la partícula desde A hasta P viene dado por $t = \int_0^s \frac{ds}{v}$
¿Cómo se puede expresar *v* y *ds* en función de *x* y de y(*x*)?

Supongamos que la partícula parte del reposo. Como no hay fricción, se cumplirá el principio de conservación de la energía. Ello significa que al moverse la partícula, desde un punto más alto a un punto más bajo, la energía potencial se convertirá en cinética. La energía potencial en un punto situado a una altura *h* es igual a *mgh*, donde *m* es la masa y *g* es la aceleración de la gravedad. La energía cinética en un punto es $\frac{1}{2}mv^2$. En el punto A la energía cinética es 0, en el punto P, la energía cinética será igual a la variación de la energía potencial entre A y P, por lo que $\frac{1}{2}mv^2 = mgx$. Despejando v, obtenemos $v = \sqrt{2gx}$. Intentemos hacer lo mismo con *ds*.

Sean los puntos $P = (x, y)$ y $(x + \Delta x, \quad y + \Delta y)$, que se encuentran en la curva *y*=*y*(*x*). Llamemos Δs a la variación de la longitud del arco de curva al pasar de un punto al otro.



Si Δx es pequeño, es Δs aproximadamente igual a $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Por lo que $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ es aproximadamente igual a $\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$. Si tomamos límites cuando Δx tiende a cero, se cumple que $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, y por lo tanto:

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \quad (8)$$

Desde aquí llegamos a que el tiempo que tarda una partícula en ir desde A hasta B, a través de la trayectoria determinada por *y*=*y*(*x*), es:

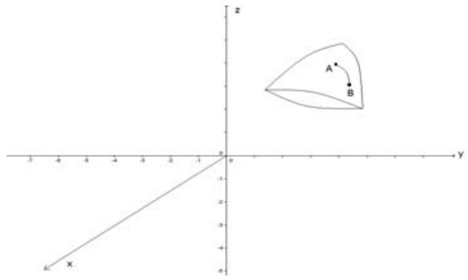
$$T[y(x)] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gx}}\,dx \quad (9)$$

Hemos de encontrar una función *y*(*x*), continua y derivable, con derivada primera continua (esto se representa diciendo que *y*(*x*) es de clase $C^{(1)}$), que nos dé la solución del problema:

$$\min T[y(x)] = \int_0^a \sqrt{\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gx}}\,dx$$ con *y*(0)=0, *y* (*a*)=*b* (10)

El procedimiento para obtener la solución es algo más complejo y resolveremos el problema más adelante.

Problema de las líneas geodésicas: Se pide determinar la línea de menor longitud que une dos puntos dados en cierta superficie $\varphi(x,y,z)=0$



Estas líneas son llamadas geodésicas. Se pide hallar el mínimo de la funcional

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2+(z')^2}\,dx \quad , \qquad (11)$$

donde las funciones $y(x)$ y $z(x)$ están sometidas a la condición $\varphi(x,y,z)=0$. Este problema fue resuelto por Jakob Bernoulli, pero el método general para resolver este tipo de problemas se obtuvo a partir de los trabajos de Euler y Lagrange.

Problema isoperimétrico: Se pide hallar una línea cerrada de longitud dada *l* que delimite el área máxima *S*. Esta línea, ya se sabía cuál era en la antigua Grecia. En este problema se exige hallar el extremo de la funcional *S* con una condición complementaria, y que es que la longitud de la curva debe ser constante, es decir, la funcional $l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$ se ha de mantener constante. Condiciones de este tipo reciben el nombre de isoperimétricas. Los métodos generales de resolución de problemas con condiciones isoperimétricas fueron desarrollados por Euler.

1.3. Introducción al cálculo variacional

En esta sección se expone el problema fundamental objeto del cálculo de variaciones y se presentan algunos importantes problemas prácticos que resuelve. Se establecen comparaciones entre conceptos similares de cursos anteriores propios del cálculo diferencial, como la idea de variación o incremento de una función, de continuidad, de máximo o mínimo y los teoremas relacionados con estos conceptos.

<u>Introducción al cálculo variacional</u>. El **cálculo de variaciones o variacional** estudia los métodos que permiten hallar los valores máximos y mínimos de las funcionales. Hay leyes de la física que se apoyan en la afirmación de que una determinada funcional alcanza su mínimo o su máximo en una determinada situación. Dichas leyes reciben el nombre de principios variacionales de la física. A dichos principios pertenecen el principio de la acción mínima, la ley de conservación de la energía, la ley de conservación del impulso, la ley de conservación de la cantidad de movimiento, el principio de Fermat en óptica, etc.

Relación entre conceptos relativos a máximos y mínimos de funciones y a máximos y mínimos de funcionales.

1. La variable *z* es función de la variable *x*, y se designa como $z=f(x)$, si a cada valor de *x* perteneciente a cierto dominio de variación de *x* le corresponde un único valor de *z*.	1. La variable *v* se llama funcional dependiente de la función $y(x)$, y se designa como, $v=v[y(x)]$, si a cada función $y(x)$ perteneciente a cierta clase de funciones le corresponde un único valor de *v*.
2. Se llama incremento Δx de la variable *x*, a la diferencia entre dos valores, $\Delta x = x - x_1$. Si *x* es la variable independiente, $dx=\Delta x$	2. Se llama incremento o variación, δy, de $y(x)$ a la diferencia entre dos funciones, $\delta y = y(x) - y_1(x)$, pertenecientes a una clase considerada de funciones M

3. La función $f(x)$ es continua en $x=x_0$, si para todo ε positivo existe un $\delta>0$, tal que si $\lvert f(x) - f(x_0)\rvert < \varepsilon$, es $\lvert x - x_0\rvert < \delta$	3. La funcional $J[y(x)]$ es continua en $y = y_0(x)$, hasta el orden de proximidad k, si para todo ε positivo existe un $\delta > 0$, tal que si $\lvert J[y(x)] - J[y_0(x)]\rvert < \varepsilon$, entonces: $\lvert y(x) \quad y_0(x)\rvert < \delta$ $\lvert y'(x) - y'_0(x)\rvert < \delta$ .... $\lvert y^{(k)}(x) - y_0^{(k)}(x)\rvert < \delta$
4. Se llama función lineal a la función $l(x)$ que satisface las siguientes condiciones $l(cx) - cl(x)$, donde c es una constante arbitraria y $l(x_1 + x_2) = l(x_1) + l(x_2)$	4. Se llama funcional lineal a la funcional $L[cy(x)] = cL[y(x)]$, donde c es una constante arbitraria y $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)]$
5. La función f(x) alcanza en un punto x_0 su máximo absoluto, si para todo punto x, perteneciente al dominio de definición de la función, se verifica que $f(x_0) \geq f(x)$. Del mismo modo se dice que f(x) alcanza en un punto x_0 su mínimo absoluto, si para todo punto x perteneciente al dominio de definición de la función, se verifca $f(x_0) \leq f(x)$.	5. La funcional $J[y(x)]$ tiene un máximo en la curva $y = y_0(x)$, si su valor en cualquier curva próxima a $y = y_0(x)$ no es mayor que $J[y_0(x)]$. O sea si $\Delta J = J[y(x)] - J[y_0(x)] \leq 0$. Si además $\Delta J=0$, sólo para $y(x)=y_0(x)$ diremos que se alcanza un máximo estricto en la curva $y=y_0(x)$. De la misma forma se define la curva $y=y_0(x)$ en la que se alcanza un mínimo. En este caso, $\Delta J \geq 0$ para todas las curvas próximas a $y=y_0(x)$
6. Teorema (Condición necesaria): Si la función derivable f(x) alcanza su máximo o su mínimo en un punto interior $x=x_0$ del dominio de definición de la función, entonces en este punto será $f'(x)=0$	6. Teorema (Condición necesaria): Si la funcional $J[y(x)]$, alcanza su máximo o su mínimo para $y=y_0(x)$, siendo $y_0(x)$ un punto interior de la región de definición de la funcional, entonces para $y=y_0(x)$ será $\delta J[y_0(x)]=0$. Las funciones para las que $\delta J = 0$ se denominan funciones estacionarias

Problema del cálculo de variaciones. Sea F una función de tres variables de clase C^2 (con derivadas parciales primeras y segundas continuas). Se considera la siguiente funcional $J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), y'(x), x)\,dx$. Se trata de encontrar aquella función $y^*(x)$, con derivadas primera y segunda continuas en $[x_0, x_1]$, verificando que $y^*(x_0) = y_0$, $y^*(x_1) = y_1$, para que la funcional J alcance el valor máximo o mínimo.

El problema en el caso de maximización, por ejemplo, es:

$$\max_{x \in \Omega} J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), y'(x), x)\,dx \tag{13}$$

$$\text{con } y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1$$

$$\Omega = \{y : [x_0, x_1] \to R \text{ tal que y posee derivadas primera y segunda continuas en } [x_0, x_1]\}$$

Para este problema, el conjunto factible (llamado conjunto de funciones admisibles) es $\Psi = \left\{ y \in \Omega \frac{\square}{y(x_0)} = y_0, \qquad y(x_1) = y_1 \right\}$

1.4 Condición necesaria de optimalidad: Condición de Euler

En esta sección se presenta la condición necesaria para la existencia de **extremal**, que va a ser una de las ideas más importantes que se van a desarrollar y en la que se va a apoyar una buena parte de los ejemplos y de los ejercicios y problemas que se presentan. A través de este resultado vamos a enlazar con la resolución de ecuaciones diferenciales, estableciendo una relación entre el problema fundamental del cálculo variacional y las ecuaciones diferenciales. Esta condición va a permitir también resolver uno de los problemas reales más importantes del cálculo variacional que se plantean en este trabajo, como es el problema de la braquistócrona. Iniciamos recordando una serie de definiciones necesarias para poder introducir los conceptos más relevantes. Continuamos con el teorema objetivo de esta sección y que es la condición de Euler y lo aplicamos finalmente a la resolución de diversos problemas.

Definición 1: Se dice que *y* es una función admisible para el problema de cálculo de variaciones si se verifica que:

$$y \in \Omega \qquad y(x_0) = y_0 \;\; \text{y} \;\; y(x_1) = y_1$$
(14)

Definición 2: Sea y^* una función admisible para el problema de cálculo de variaciones. Se dice que y^* es máximo global si para cualquier función admisible *y*, se verifica que $J(y) \leq J(y^*)$.

Definición 3: Sea y^* una función admisible para el problema de cálculo de variaciones. Se dice que y^* es máximo local, si existe un $\delta > 0$, tal que para toda función admisible *y*, perteneciente a la bola $B(y^*, \delta)$, se verifica que $J(y) \leq J(y^*)$

Teorema Condición de Euler: Si $y^*(x)$ es un máximo local del problema variacional, entonces en $y^*(x)$ **se verifica la ecuación diferencial**:

$$[F]_y \left(y^*(x), (y^*)'(x), x\right) - d/dx\, F_{y'} \left[y^*(x), (y^*)'(x), x\right] = 0 \qquad (x \in [x_0, x_1])$$
(15)

Esta última expresión recibe el nombre de **ecuación de Euler** (Euler la publicó en 1744). Puede que no haya ninguna función que sea solución de la ecuación anterior y si la hay puede que no sea única.

Otra forma de expresar esta ecuación la obtenemos utilizando la regla de la cadena para derivar la expresión $\dfrac{d}{dx}F_{y'}$. Llegamos a:

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \qquad (16)$$

A las funciones que satisfacen la ecuación de Euler se les llama **extremales** y sólo en una de esas extremales se puede alcanzar el máximo o mínimo de la funcional.

Ejemplo 1. Obtén las funciones que verifiquen las condiciones necesarias de máximo local del siguiente problema:

$$\max\; J(y) = \int_0^2 (-12xy - y'^2)\,dx \quad \text{con} \quad y(0) = 2, \qquad y(2) = 12$$
(17)

Solución:

$$F(x, y, y') = -12xy - y'^2$$
$$F_y = -12x \qquad F_{y'} = -2y'$$
$$\frac{d}{dx}(-2y') = -2y''$$

La condición de Euler supone resolver la ecuación diferencial

$$-12x - (-2y'') = -12x + 2y'' = 0$$

Ello implica que:

$$2y'' = 12x; \quad y'' = 6x$$

$$y' = \frac{6x^2}{2} + c_1; \quad y' = 3x^2 + c_1$$

$$y = \frac{3x^3}{3} + c_1 x + c_2; \quad y = x^3 + c_1 x + c_2$$

Como $y(0)=2$ $y(2)=12$, obtenemos $c_2=2$, $8+c_1 \cdot 2+2=12 \rightarrow c_1=1$

$y=x^3+x+2$, $0 \leq x \leq 2$. El máximo sólo puede alcanzarse en la función $\boldsymbol{y(x)=x^3+x+2}$

Ejemplo 2: Obtén las funciones que verifiquen las condiciones necesarias de máximo o mínimo local del siguiente problema:

$$opt\ J(y) = \int_0^1 (x(y \mid y^2 \quad 2y^2 y')dx \tag{18}$$

Con $y(0)=2$, $y(1)=5$

Solución:

$$F(y, y', x) = xy + y^2 - 2y^2 y'$$

Tenemos que:

$$F_y = x + 2y - 4y\,y'$$

$$F_{y'} = -2y^2; \quad \frac{d}{dx}\left(-2y^2\right) = -4y\,y'$$

Por lo tanto, la condición de Euler es la ecuación diferencial:

$\boldsymbol{x + 2y - 4yy' + 4yy' = 0}$, **lo que implica que** $\boldsymbol{y(x) = -1/2\, x}$, **con 0($\boldsymbol{x}$ (1**

Utilizando las condiciones inicial y final, obtenemos:

$2=y(0)=0$, lo cual es imposible

$5=y(1)= -$ ½, lo cual también es imposible. Ello quiere decir que el problema dado no tiene ni máximo ni mínimo, es decir, no hay extremal que verifique las condiciones inicial y final.

En estos dos ejemplos hemos podido comprobar la relación que se establece entre el cálculo de variaciones y las ecuaciones diferenciales a través de la condición de Euler. Es decir, **si el problema variacional tiene solución, necesariamente ha de tenerla la ecuación diferencial correspondiente a la condición de Euler.**

Casos particulares de la ecuación de Euler:

a) F no depende de *y´*

Si F no depende de *y´*, la ecuación de Euler es de la forma $F_y=0$, que es una ecuación algebraica sin ninguna complicación, pero que sólo tendrá solución si por casualidad se cumplen las condiciones de frontera.

Ejemplo: $\min J[y(x)] = \int_0^1 (x+y)^2 dx \quad \text{con las condiciones} \quad y(0)=a, \quad y(1)=b$. Halla los valores de *a* y de *b*, para los que la solución obtenida sea solución admisible.

Solución: $F=(x+y)^2$; $F_y=2(x+y)=0 \Rightarrow y=-x$. Para que se cumplan las condiciones de frontera, deber ser $a=0$ y $b=-1$

b) F depende sólo de *y´*

Si F no depende ni de y ni de x, entonces F_y, $F_{xy'}$ y $F_{yy'}$, son nulos. Teniendo en cuenta la expresión desarrollada de la ecuación de Euler, $F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$, nos quedaría $F_{y'y'}y'' = 0$. Se ha de cumplir que, o bien y´´=0 o bien $F_{y'y'} = 0$. Si y´´=0, ha de ser $y(x)=C_1x+C_2$, que es una familia de rectas dependiente de dos parámetros C_1 y C_2. Si es $F_{y'y'}(y') = 0$, quiere decir que esa ecuación tiene raíces reales, con lo cual $y'=k$ e $y=kx+C$, que es también una familia de rectas con un solo parámetro y que está contenida en la familia anterior. Según esto, la longitud del arco de una curva $L[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\, dx$, tiene como extremales rectas $y=C_1x+C_2$, lo que nos parece lógico porque sabemos que la distancia mínima entre dos puntos es la recta.

Veamos otro ejemplo que puede resultar interesante. Si consideramos que el tiempo que se tarda en recorrer una curva $y=y(x)$ desde un punto $A(x_0,y_0)$ hasta otro punto $B(x_1,y_1)$ viene dado por la funcional $T(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{v(y')}}\, dx$, donde $l(y(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+[y'(x)]^2}\, dx$ es la longitud del arco de curva, y *v*(y´) es la velocidad, que, en este caso sólo depende de y´, estamos en la situación planteada en este apartado y podemos asegurar que el óptimo, caso de existir, es una recta. ¿Qué lo diferencia del problema de la braquistócrona, cuya solución no es una recta, según las conclusiones de los matemáticos que se enfrentaron a él?

c) F sólo depende de *y* y de *y´*.

En este caso la ecuación de Euler $F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$ toma la forma $F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$. Multiplicando los dos miembros por y´, obtenemos $\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = 0 \Rightarrow F - y'F_{y'} = \text{Constante}$

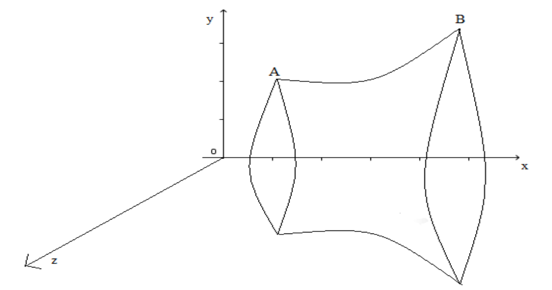
Ejercicio 1: Halla la extremal de la funcional $J[y(x)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$ que pasa por los puntos fijos (a_1,b_1) y (a_2,b_2) pertenecientes al semiplano superior.

Solución: Como $F = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$ no contiene a *x*, utilizamos la expresión $F - y'F_{y'} = C$, que nos lleva $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y'\frac{y'\sqrt{1+y'^2}}{y} = C$, que queda como $y\sqrt{1+y'^2} = C^*$, siendo C^* la inversa de *C*.

Para resolver esta ecuación diferencial de una manera sencilla podemos hacer el cambio $y' = \tan t$, con lo cual $y = \frac{C^*}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = C^* \cos t; \quad dy = -C^* sent\, dt$. Como $\frac{dy}{dx} = \tan t, \quad \frac{-C^* sent\, dt}{\tan t} = dx; \quad -C^* \cos t\, dt = dx; \quad -C^* sent + C_1 = x$. Eliminando el parámetro *t*, obtenemos $\left(x - C_1\right)^2 + y^2 = C^{*^2}$ que es una familia de circunferencias de centro en el eje de abscisas.

Según el principio de Fermat, el camino que recorre un rayo de luz al propagarse con una velocidad v(*x*,*y*) en un medio bidimensional no homogéneo constituye una extremal de la funcional $J\left[y(x)\right] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{v(x, y)} dx$. Si la velocidad de la luz es proporcional a *y*, estamos en un caso muy similar al anterior y los rayos de luz representan arcos de circunferencia con centros en el eje OX.

Ejercicio 2: Problema de la superficie mínima de rotación.

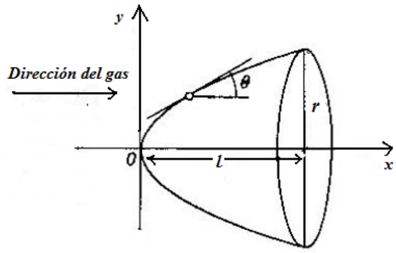


Halla la curva con puntos inicial y final dados, A y B, que al girar alrededor del eje de abscisas forme una superficie de área mínima.

Solución: Si recordamos, el área de una superficie de revolución es $S\left[y(x)\right] = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Esta función depende sólo de *y* y de *y´*. Por ello, la ecuación de Euler tiene la forma $F - y' F_{y'} = \text{Constante}$. Es decir, $y\sqrt{1 + y'^2} - \frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$, que al simplificar queda como $\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$. Un modo de poder integrar esta ecuación de manera relativamente sencilla, es hacer la sustitución *y´=sh t*. De esta forma queda *y=Cch t*, y $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C\, sh\, t\, dt}{sh\, t} = Cdt \Rightarrow x = Ct + C^*$. Al proceder así la superficie que buscamos se forma al rotar la curva cuya ecuación viene dada en forma paramétrica por $\begin{array}{l} x = Ct + C^* \\ y = Ccht \end{array}$. Si se elimina el parámetro *t*, se tendrá $y = C \cdot ch \frac{x - C^*}{C}$, que representa una familia de catenarias. Las constantes hay que buscarlas a partir de las condiciones de frontera que nos dicen que la curva empieza en A y acaba en B.

Problema del cuerpo de resistencia mínima en un fluido

Veamos ahora un ejemplo un poco más complejo, pero muy interesante por su aplicación práctica. Parece ser que fue el primer problema importante de este tipo, propuesto y resuelto por Newton. En sus *Principia* estudió el contorno que debe tener una superficie de revolución moviéndose a una velocidad constante en la dirección de sus ejes para que presente la mínima resistencia al movimiento. Trataremos aquí con este problema. Supongamos que queremos hallar la forma de un cuerpo sólido de revolución que se mueve en un fluido gaseoso, de manera que encuentre la resistencia mínima al movimiento.



Supondremos también que la densidad del gas es suficientemente pequeña y que las moléculas se reflejan como en un espejo cuando chocan contra la superficie del cuerpo. La componente normal de la presión será $P=2\rho v^2\sin^2\theta$, siendo ρ la densidad del gas, v la velocidad del gas respecto del cuerpo y θ el ángulo que se forma entre la velocidad y su componente tangencial. Ya que la presión es perpendicular a la superficie, la componente según el eje OX de la fuerza que actúa sobre un anillo de anchura $\sqrt{(1+y'^2)}dx$ y de radio $y(x)$, se puede representar como $dF = 2\rho v^2 \sin^2\theta\left[2\pi y\sqrt{(1+y'^2)}\right]\sin\theta\, dx$. La fuerza que actúa en la dirección positiva del eje OX será $F=\int_0^l 4\pi\rho v^2 \sin^3\theta\, y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. Para simplificar un poco el problema vamos a suponer que $\sin\theta = \dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \approx y'$. Tendremos de esta forma que $F = 4\pi\,\rho v^2\int_0^l y'^3\, y\,dx$. Se trata de hallar la función $y(x)$ en la que F alcanza el menor valor posible, siendo $y(0)=0$ e $y(l)=r$

$$F(x,y,y') = y'^3 y;\quad F_y = y'^3;\quad F_{y'} = 3yy'^2;\quad \frac{d}{dx}F_{y'} = 3y'^3+6y\,y'y''$$

La ecuación de Euler queda $y'^3-3y'^3-6y\,y'y''=0;\qquad y'^3+3y\,y'y''=0$. Multiplicando por y´, llegamos a $F-y'F_{y'}=C_1$, es decir, $y'^3y-y'3y\,y'^2=-2y'^3y=C$, o lo que es lo mismo $y'^3y=C_1$; $\qquad y'=\dfrac{\sqrt[3]{C_1}}{\sqrt[3]{y}}=\dfrac{C_2}{\sqrt[3]{y}}=C_2y^{-1/3}$. Resolviendo la ecuación diferencial llegamos a $y=(C_2x+C_3)^{3/4}$ Usando las condiciones de frontera nos queda $C_3=0$; $r=(C_2l+C_3)^{3/4}$; $C_2=\dfrac{r^{4/3}}{l}$, luego $y=\left(\dfrac{r^{4/3}}{l}x\right)^{3/4}=\dfrac{r}{l^{3/4}}x^{3/4}$

c) F sólo depende de x y de *y´*.

Ello quiere decir que F=F(x,y´). La ecuación de Euler es en este caso $\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0$ y ello supone que $F_{y'}=C\,(\textbf{Constante})$

Ejercicio 1: Entre las curvas que unen los puntos A(1,3) y B(2,5), halla la curva en la que puede alcanzar su extremo la funcional $J[y(x)]=\int_1^2 y'(1+x^2y')dx$

Solución: $F(x,y,y')=y'(1+x^2y');\quad F_y=0;\quad F_{y'}=1+x^2y'+y'x^2=1+2y'x^2$

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=0\Rightarrow F_{y'}=C;\quad 1+2x^2y'=C;\quad y'=\frac{C-1}{2x^2};\quad y=\frac{1-C}{2x}+C^*;\quad y=\frac{C_1}{x}+C^*$$

Los extremales son, por lo tanto, una familia de hipérbolas. Si tenemos en cuenta las condiciones de frontera tenemos: $3=C_1+C^*$, $5=C_1/2+C^* \Rightarrow C_1=-4$; $C^*=7$. Luego nuestra extremal será $y=\frac{-4}{x}+7$

Problema de la braquistócrona: Cuando con anterioridad hemos hablado del problema de la braquistócrona hemos llegado a la conclusión de que:

$$T(y(x))=\int_0^a \sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{2gx}}dx=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^a \sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{x}}dx. \qquad (19)$$

Podemos observar que T(y) no depende de y, sino sólo de x y de y´(x). Si utilizamos la condición de Euler en la expresión $\int_0^a \sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{x}}dx$, donde $F(x,y(x),y'(x))=\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{x}}$ sería $F_y=0$, con lo que tendríamos $\frac{d}{dx}F_{y'}=0$, que equivale a decir que $F_{y'}=\text{Constante}$

Pero, $F_{y'}=\frac{1}{2\sqrt{1+(y'(x))^2}}\frac{2y'(x)}{\sqrt{x}}=\frac{y'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+(y'(x))^2}}=C$. Por comodidad, hagamos $C_1=1/C$. Nos queda $\frac{y'(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+(y'(x))^2}}=\frac{1}{C_1}$. Elevamos al cuadrado ambos miembros $\frac{[y'(x)]^2}{1+[y'(x)]^2}=\frac{x}{C_1^2}$. Haciendo operaciones, obtenemos:

$$C_1^2[y'(x)]^2=x+x[y'(x)]^2; \quad (C_1^2-x)[y'(x)]^2=x; \quad [y'(x)]^2=\frac{x}{C_1^2-x}; \quad \left[y'(x)=\sqrt{\frac{x}{C_1^2-x}}\right]$$

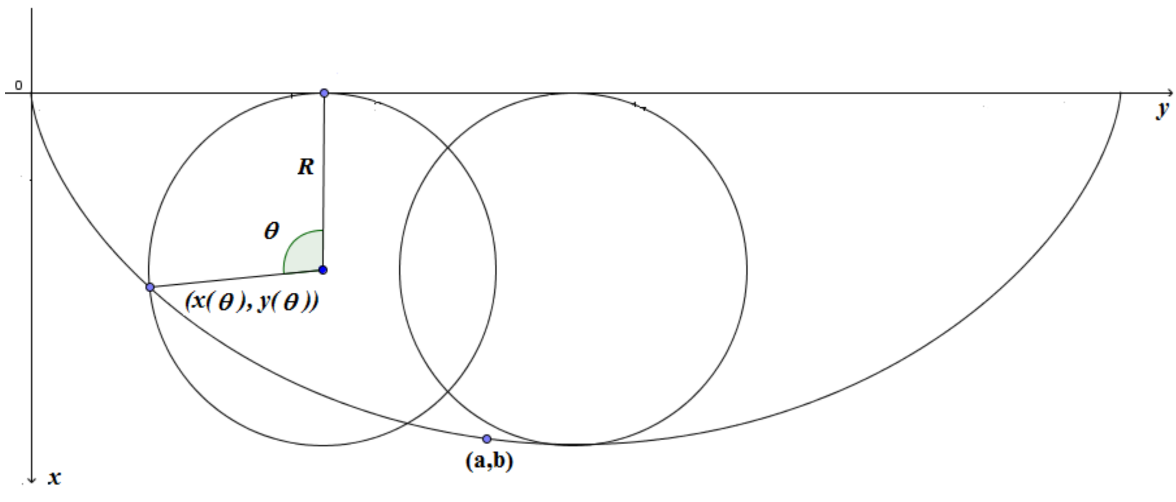
Se cumple que y´(0)=0. Para facilitar el trabajo, introduzcamos una nueva variable independiente θ, de la siguiente forma: $x(\theta)=\frac{C_1^2}{2}(1-\cos\theta)=C_1^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$. $\theta=0$ cuando x=0 y si $\theta<\pi$, θ aumenta con x. $C_1^2-x(\theta)=C_1^2\left(1-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=C_1^2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{C_1^2}{2}(1+\cos\theta)$. Si utilizamos la regla de la cadena, obtenemos que: $\frac{dy}{d\theta}=y'(x)x'(\theta)=y'(x)\frac{C_1^2}{2}\sin\theta$, y teniendo en cuenta la expresión entre corchetes, llegamos a:

$$\frac{dy}{d\theta}=\sqrt{\frac{x}{C_1^2-x}}\frac{C_1^2}{2}\sin\theta=\sqrt{\frac{\frac{C_1^2}{2}(1-\cos\theta)}{C_1^2-\frac{C_1^2}{2}(1-\cos\theta)}}\frac{C_1^2}{2}\sin\theta=\sqrt{\frac{\frac{C_1^2}{2}(1-\cos\theta)}{\frac{C_1^2}{2}(1+\cos\theta)}}\frac{C_1^2}{2}\sin\theta=(1-\cos\theta)\frac{C_1^2}{2}$$

Integrando, tenemos que: $y(\theta) = \frac{C_1^2}{2}(\theta - \sin\theta) + C_2$. Como y(0) ha de ser igual a cero, nos queda C_2=0. Uniendo las dos expresiones tenemos:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \frac{C_1^2}{2}(1-\cos\theta) \\ y(\theta) &= \frac{C_1^2}{2}(\theta - \sin\theta) \end{aligned}, \qquad (20)$$

Si llamamos R a $\frac{C_1^2}{2}$, obtenemos $\begin{aligned} x(\theta) &= R(1-\cos\theta) \\ y(\theta) &= R(\theta - \sin\theta) \end{aligned}$, siendo $0 \le \theta \le \theta_1$. R y θ_1 se obtienen teniendo en cuenta que $x(\theta_1) = a$ e $y(\theta_1) = b$. La curva descrita por estas ecuaciones es la cicloide que pasa por (0,0). La cicloide se obtiene a partir del recorrido de un punto de la circunferencia de radio R que rueda a lo largo del eje Y, por debajo.



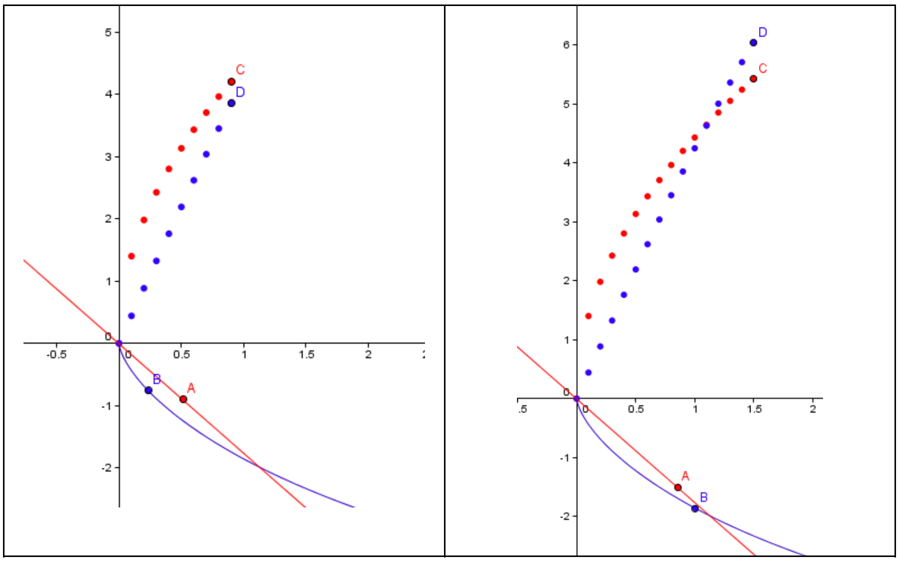
Podemos considerar este otro ejemplo en el que trabajamos con la funcional $T[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+[y'(x)]^2}}{x} dx$, donde T hace referencia al tiempo empleado en desplazarse por la curva *y*=*y*(*x*) desde un punto x_0 hasta un punto x_1, a una velocidad *v*=*x*. Ya que $\frac{ds}{dt} = x$, entonces $dt = \frac{ds}{x}$. Estamos en un caso similar al de la braquistócrona, en el que T(y) no depende de y, sino sólo de x y de y´(x). Sería, por lo tanto, F_y=0 y de nuevo tendríamos $\frac{d}{dx}F_{y'} = 0$, que equivale a decir que $F_{y'} = \frac{2y'}{2x\sqrt{1+(y')^2}} = \text{Constante} = \text{C}$. Si para integrar esta expresión hacemos un cambio de variable de la forma y´=tanθ, y consideramos que $\frac{1}{C} = C_1$, llegamos a la expresión $x^2 + (y - C_2)^2 = C_1^2$. Esta ecuación representa una familia de circunferencias con centros en el eje de ordenadas, lo que nos viene a mostrar que Galileo no andaba tan equivocado en sus intuiciones.

Como se ha podido observar a través de este recorrido de aplicaciones prácticas, incluyendo pequeñas modificaciones en las condiciones de los problemas podemos saltar de una situación real a otra diferente, resolviéndola con pocos cambios y utilizando sólo un par de condiciones. De esta forma, los estudiantes pueden ver la tremenda potencia de esta teoría.

Por ejemplo, hemos pasado de calcular el recorrido óptimo de un rayo de luz a calcular la curva a lo largo de la cual se llega de un punto a otro en el menor tiempo realizando muy pequeños cambios, o se ha establecido una importante relación entre la superficie mínima de rotación y la forma de una cuerda flexible de longitud fija colgada de dos puntos, utilizando los mismos conceptos y variando apenas el procedimiento.

2. SIMULACIÓN DEL PROBLEMA DE LA BRAQUISTÓCRONA

Se trata de que los estudiantes simulen con la ayuda de GeoGebra el movimiento de una partícula sobre una recta y sobre la cicloide, con el fin de que comprueben que lo que han obtenido previamente a nivel teórico y utilizando fórmulas matemáticas se da realmente y se puede observar. Se dibujará una cicloide y se escogerán dos puntos de ella (el segundo de ellos más bajo que el primero). Se trazará una recta que pase por ambos puntos. Sobre curva y recta se trazarán puntos que se irán moviendo según varíe el parámetro θ de la curva cicloide (por comodidad en la escritura reemplazaremos la letra θ por la letra t), que vendrá expresada en paramétricas. A la vez y utilizando las fórmulas apropiadas, ya deducidas a nivel teórico, se representarán gráficamente las curvas correspondientes a las velocidades. La observación será de esta forma doble. Por una parte se podrá comprobar cómo la partícula que recorre la cicloide adelanta a la que se desliza por la recta antes de llegar al segundo punto, y por otra parte se comprobará cómo las ordenadas de los puntos que representan la velocidad de la partícula que recorre la cicloide se sitúan a partir de un determinado valor del parámetro θ por encima de los que representan la velocidad de la partícula que se mueve sobre la recta. Se muestran dos imágenes del recorrido de la partícula sobre recta y curva cicloide (en la parte inferior de la figura) y las trayectorias de las velocidades (azul para la cicloide y roja para la recta).



3. BIBLIOGRAFÍA

Cerdá, E. (2001). Optimización dinámica, (1a ed). (p. 322). Madrid, España. Pearson Educación

Elsgoltz, L. (1969). Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional, (1a ed). (p. 432). Moscú, Rusia. MIR

Krasnov, M.L., Makarenko, G. y Kiseliov, A. (1992). Cálculo Variacional, (1a ed). (p. 190). Moscú, Rusia. MIR.

Troutman, J.L. (1995). Variational Calculus and Optimal Control, (2a ed). (p. 461). New York, USA. Springer.

Autoría

Mª José Haro Delicado.
IES Al-Basit. Profesora de matemáticas y Jefe del Departamento de Matemáticas
Profesora Asociada de la Escuela Superior de Ingeniería Informática de la UCLM en Albacete (Departamento de Matemáticas)

Mª José Pérez Haro
M.S. Facultad de Ciencias Físicas. Universidad Complutense de Madrid

Datos de contacto:
IES Al-Basit avda. de España 42 02006 Albacete
967228716 o 649339565
iesalbasit@iesalbasit.es o mariajose.haro@uclm.es