Matemáticas y consumo: aplicación a un producto de la cesta de la compra

Autoría: Gema Calbo Sanjuán y Juan Carlos Cortés López

Temática: Matemáticas

Palabras clave: Ecuaciones en diferencias, matemáticas para el consumo, geometría elemental

Resumen

En este trabajo se propone un ejemplo de actividad docente que puede ser llevada al aula en distintos niveles educativos, desde Secundaria hasta un primer curso universitario con contenidos en ecuaciones en diferencias, donde se muestra la aplicación de las Matemáticas al análisis del etiquetado de un producto de consumo, en nuestro caso concreto, el papel de aluminio. Se proponen tres formas distintas, pero equivalentes, de realizar el estudio y éste se aplica a diferentes marcas del mercado, lo que permite emitir una crítica fundamentada como consumidores, poniendo en valor el uso de las Matemáticas en la vida cotidiana.

1. INTRODUCIÓN

La incorporación en el aula de experiencias didácticas que involucren el uso de las Matemáticas y su aplicación al análisis del consumo es una temática que, si bien ha sido ya explorada por algunos autores (Corbarán, 2007) y (Roldán, 1996), por ejemplo, creemos que puede ser aprovechada por los docentes como una motivación más para mostrar a los alumnos cuán fecundo puede ser el uso de las Matemáticas en el análisis de situaciones tan cotidianas como testear la calidad del etiquetado de los productos que compramos en el supermercado. En estas páginas proponemos el análisis del etiquetado que figura en la caja-envase de un rollo de aluminio. Para hacer este estudio, proponemos varios enfoques con diferentes niveles de dificultad que pueden ser llevados al aula a diferentes niveles educativos, desde secundaria, pasando por bachillerato hasta en un primer curso universitario. Veremos que a pesar de las diferentes formas de abordar el problema, llegamos a una misma solución. Finalmente, y como parte fundamental, para que el estudio aquí mostrado se evidencie frente al aluminio con interés práctico real, lo aplicaremos a diferentes marcas de papel de aluminio adquiridas en un supermercado, lo que les permitirá a los alumnos emitir una crítica como consumidores.

2. EL PROBLEMA A TRATAR Y ALGUNOS ENFOQUES PARA RESOLVERLO

Vamos a considerar que hemos incluido en nuestra cesta de la compra un rollo de papel de aluminio en cuyo envase indica que tiene, por ejemplo, L = 50 metros. Nos planteamos, como consumidores, si efectivamente, el rollo mide o no esa longitud anunciada. Pero, ¿cómo hacerlo? Desde luego, no parece lo más adecuado ir, por ejemplo, a una cancha de baloncesto, para desenrollar el papel y medirlo (cosa que por otra parte habría que hacer con mucha precisión porque este método, además de poco ortodoxo y poco atractivo, podría inducirnos a error, si el papel no está bien desenrollado y nuestra forma de proceder con la medición no es muy cuidadosa). Pensemos, como profesores de las Matemáticas, el servicio que ellas nos puedan prestar en esta ocasión. Probablemente, simplemente realizando esta propuesta de estudio a nuestros alumnos, nos deparará más de una agradable sorpresa. De hecho lo que sigue de estas páginas no son más que algunas propuestas de resolución a este problema, algunas muy sencillas, otras más técnicas y otras sencillamente originales, que se han derivado del trabajo de este problema en el aula.

2.1. Primer enfoque

Empecemos considerando el rollo de papel como un cilindro hueco (véase figura 1) donde r denota el radio del tubo cilíndrico de cartón sobre el cual va arrollado el papel y R es el radio del cilindro total del rollo (con el papel arrollado).

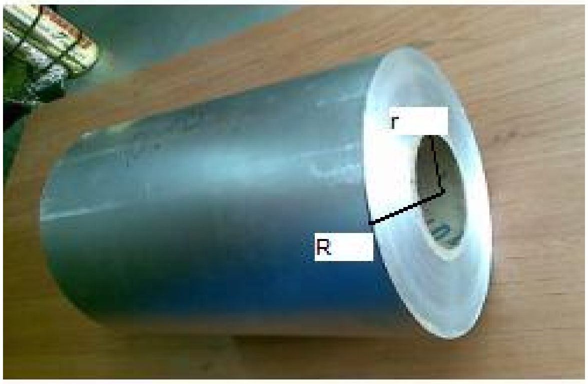

Figura.1. Cilindro del rollo de papel.

Podemos considerar que la longitud L del rollo de papel de aluminio (que es la magnitud que queremos calcular) es la suma del conjunto de cada una de las n capas que definen el cilindro de aluminio. Si denotamos por e el espesor del papel de aluminio, la longitud l_i de la capa i-ésima es la de una circunferencia de cierto radio que, como veremos a continuación, es función de r y e (asumiremos que el radio de cada capa llega desde el centro de la circunferencia que define el cilindro hueco de cartón hasta el punto medio de la capa correspondiente, para minimizar los errores de aproximación, ya que, en realidad la hipótesis de que cada capa es una circunferencia no es estrictamente cierta): Surge aquí un detalle interesante para ser abordado en el aula: ¿cómo cambiará la solución si en lugar de tomar esta aproximación, es decir, coger el punto medio del espesor de la capa, tomamos otros, por ejemplo, un punto de la parte de la capa más cercana al centro del cilindro de cartón o un punto de la parte más lejana?

REVISTA DIGITAL "PROGRAMAS".
CEP DE ALBACETE ISSN: 1988-7922
http://www.abceps.es/revistacep

$$
\begin{aligned}
l_1 &= 2\pi\left(r+\frac{1}{2}e\right)\\
l_2 &= 2\pi\left(r+\frac{3}{2}e\right)\\
l_3 &= 2\pi\left(r+\frac{5}{2}e\right)\\
l_4 &= 2\pi\left(r+\frac{7}{2}e\right)\\
\vdots\ &\ \vdots \qquad \vdots\\
l_n &= 2\pi\left(r+\left(n-\frac{1}{2}\right)e\right)
\end{aligned} \qquad (1)
$$

Por tanto se tiene

$$L = 2\pi\sum_{i=1}^{n}\left(r+\left(i-\frac{1}{2}\right)e\right) = 2\pi\frac{\left(r+\frac{1}{2}e+r+\left(n-\frac{1}{2}\right)e\right)n}{2} = \pi(2r+ne)n \qquad (2)$$

donde hemos aplicado la fórmula de la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética. Por otra parte observemos que se cumple:

$$n = \frac{R-r}{e} \Rightarrow ne = R-r \qquad (3)$$

Por lo que la fórmula (2) se reescribe como sigue:

$$L = \pi(2r+R-r)\frac{R-r}{e} = \pi\frac{(R+r)(R-r)}{e} = \pi\frac{R^2-r^2}{e} \qquad (4)$$

Fórmula que nos da la solución en términos de los datos: los radios de los cilindros (el exterior R, e interior r), los cuales podemos nosotros mismos medir en casa y el espesor del papel que es un dato que facilita el fabricante en el envase o en su página web.

2.2. Segundo enfoque

La siguiente es una solución sorprendente que surgió del trabajo en el aula y que no requiere conocimientos importantes, se basa en una buena idea. Si, como habíamos dicho al principio de estas líneas desenrollamos el papel del aluminio, la tira que queda puede considerarse como un paralelepípedo de altura finísima e igual a: e, el espesor y base un rectángulo de lados, la longitud L buscada y anchura la altura del cilindro, digamos h (véase figura 2).

Figura.2. Paralelepípedo de altura el espesor asociado al rollo de papel cuando éste se va desenrollado.

El volumen de este paralelepípedo debe coincidir con el del cilindro hueco que define el rollo de aluminio. Imponiendo esta condición se obtiene una ecuación que permite calcular L en términos de los datos:

$$\text{Volumen cilindro con hueco} = \pi(R^2 - r^2)h = eLh = \text{Volumen paralelepípedo} \qquad (5)$$

Despejando:

$$L = \frac{\pi(R^2 - r^2)}{e} \qquad (6)$$

Ciertamente esta solución coincide con la dada en (4).

2.3. Tercer enfoque

Las soluciones anteriores han sido construidas sobre razonamientos muy sencillos desde el punto de vista del aparataje matemático requerido, sin embargo, como vernos a continuación, la solución que ahora presentaremos puede ser abordada en un primer curso universitario con contenidos de ecuaciones en diferencias. Denotemos por L_n la longitud del papel después de n vueltas y, pasemos a relacionar L_n con L_{n+1}. Para ello observemos que como la longitud arrollada en n + 1 vueltas es la longitud arrollada en n vueltas más la longitud arrollada en una vuelta más, la cual es la longitud de una circunferencia de radio, la suma del radio del cilindro de cartón más el espesor correspondiente a n vueltas cada una de espesor e, por tanto se tiene

$$L_{n+1} = L_n + 2\pi(r + ne) \qquad (7)$$

ahora bien con objeto de establecer comparaciones entre el resultado que ahora obtengamos y el obtenido por otros enfoques adoptaremos el mismo criterio de aproximación que tomamos en el enfoque 1, es decir, coger, como radio de cada capa, el valor desde el centro de cilindro de cartón sobre el que se arrolla el papel hasta el punto medio de la capa correspondiente, por tanto, en lugar de (7) tomamos

REVISTA DIGITAL "PROGRAMAS".
CEP DE ALBACETE ISSN: 1988-7922
http://www.abceps.es/revistacep

$$L_{n+1} = L_n + 2\pi\left(r + \left(n + \frac{1}{2}\right)e\right) \tag{8}$$

que es una ecuación en diferencias (e.e.d.) lineal de orden 1 no homogénea o completa con coeficientes constantes. Procedamos a resolver dicha ecuación. Sabemos que su solución es la suma de la solución general de la e.e.d. homogénea asociada, i.e., de

$$L_{n+1} = L_n \tag{9}$$

y una solución particular de la e.e.d. completa (8). La solución general de (9) es de la forma:

$$L_n^{gh} = A \tag{10}$$

siendo A una constante libre. Mientras que una solución particular de (8) puede encontrarse ensayando soluciones de la forma (previamente sería conveniente en el aula, testear soluciones constantes primero y, lineales después y, mostrar que ambas nos conducen a contradicciones, y por ello ensayaremos soluciones cuadráticas)

$$L_n^{pc} = \alpha\, n^2 + \beta n \tag{11}$$

donde α y β son constantes que están por determinar. Imponiendo que (11) sea solución de (8) se obtiene (igualando coeficientes de los polinomios de segundo orden en n que resultan en cada miembro):

$$\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) = \alpha n^2 + \beta n + 2\pi\left(r + \left(n + \frac{1}{2}\right)e\right) \Rightarrow \begin{cases} n^2 & : & \alpha & = & \alpha \\ n^1 & : & 2\alpha + \beta & = & \beta + 2\pi\, e \\ n^0 & : & \alpha + \beta & = & 2\pi\left(r + \frac{1}{2}e\right) \end{cases} \tag{12}$$

resolviendo el sistema que resulta de las dos últimas ecuaciones se tiene:

$$\alpha = \pi\, e, \quad \beta = 2\pi\, r \tag{13}$$

Por tanto, sustituyendo estos valores en (11) se llega a que

$$L_n^{pc} = \pi\, e\, n^2 + 2\pi\, r\, n \tag{14}$$

y la solución buscada es de la forma

$$L_n^{gc} = L_n^{gh} + L_n^{pc} = A + \pi\, e\, n^2 + 2\pi\, r\, n \tag{15}$$

REVISTA DIGITAL “PROGRAMAS”.
CEP DE ALBACETE ISSN: 1988-7922
http://www.abceps.es/revistacep

Para calcular la constante A, debemos tomar una condición inicial, por ejemplo, es claro que, si n = 0 (es decir, cuando el rollo de papel no tiene ninguna vuelta arrollada, la longitud del papel es 0), por tanto, sustituyendo en (15):

$$0 = A + \pi e 0^2 + 2\pi r 0 = A \Rightarrow A = 0 \qquad (16)$$

En resumen, sustituyendo este valor de A en (15), la longitud del rollo de papel es

$$L_n = \pi e n^2 + 2\pi r n \qquad (17)$$

Para expresar este valor en términos de los datos (que son el espesor e y los radios r y R del cilindro de cartón y del cilindro exterior, respectivamente) basta sustituir la relación dada en (3) en (17), con lo que se obtiene:

$$L = \pi e \left(\frac{R-r}{e} \right)^2 + 2\pi r \frac{R-r}{e} = \pi \frac{R-r}{e} (R+r) == \pi \frac{R^2 - r^2}{e} \qquad (18)$$

donde hemos eliminado por conveniencia la notación de la dependencia de L respecto de n, ya que, esta dependencia ha sido eliminada. Obsérvese que la fórmula obtenida coincide con las halladas con los dos enfoques anteriores.

3. CASO PRÁCTICO

En este apartado aplicaremos la fórmula obtenida anteriormente a varias marcas del mercado para comparar la veracidad de su etiquetado. Por cortesía omitiremos los nombres reales de las marcas. Aunque el espesor de cada marca puede diferir, las diferencias prácticamente son mínimas y tomaremos un valor común en todos los casos.

Figura.3. Diferentes marcas del mercado.

La tabla 1 recoge los resultados obtenidos para tres marcas diferentes. La tabla es tan elocuente que entendemos que no merece aquí (sí en aula) más comentarios. Obsérvese solamente que las marcas con tubo de aluminio más "aparente" son las más engañosas.

MARCA	FÓRMULA	ENVASE
A (R = 2.1cm; r = 1.5cm)	45.2201 m	50 m
B (R = 2.45cm; r = 2cm)	41.9260 m	50 m
C (R = 1.9cm; r = 1.5cm)	28.4712 m	30 m
D (R = 2.36cm; r = 2.1cm)	24.2866 m	30 m

Tabla.1. Estudio comparativo de diferentes marcas del mercado con espesor común e = 0.0015 cm.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha mostrado un ejemplo sencillo y práctico a cerca de cómo llevar al aula el uso de las matemáticas, a diferentes niveles educativos, bajo un mismo problema relacionado con la actividad diaria, como es el análisis del etiquetado de productos que consumimos diariamente. Creemos que los docentes debemos esforzarnos en incluir este tipo de experiencias en el aula para mostrar con ejemplos muy cercanos al quehacer diario de nuestros alumnos, el valioso papel que pueden jugar las matemáticas en nuestra vida diaria.

REFERENCIAS:

Corbarán, F., (2007). Matemáticas de la Vida Misma, (1a ed). Barcelona, España. Grao.

Roldán, C.I. (1996). Matemáticas con Leche. Transversalidad Nutricional. Suma, Número 22. (pp. 79-82).

■ Autoría

Gema Calbo Sanjuán (Jefa de departamento de Matemáticas)
I.E.S. Els Évols (L'Alcúdia, Valencia)
TFNO: 96 2996566
CORREO: gemacalbo@gmail.es
PÁGINA WEB: http://www.ieselsevols.gva.es

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemática Aplicada (Universidad Politécnica de Valencia)
963877000-ext.88289
CORREO: jccortes@mat.upv.es
PÁGINA WEB: http://upv.es/mat