¿Debería vender ya? Un ejemplo de actividad multidisciplinar Matemáticas y Economía

Autoría: Gema Calbo Sanjuán y Juan Carlos Cortés López

Temática: Matemáticas y Economía

Palabras clave: Optimización de funciones, tasa de crecimiento instantánea de una función, coste de oportunidad, regímenes de capitalización de intereses discreto y continuo, Economía, Matemática Multidisciplinar

Resumen

En este artículo se propone una actividad de tipo multidisciplinar Matemáticas-Economía donde se aborda el problema de optimización de ciertas funciones de interés económico. A través primero de una exposición teórica, y después, mediante un ejemplo numérico se aborda el estudio de la optimización de funciones crecientes en el tiempo (que representa el valor temporal de una determinada inversión) haciendo uso del concepto de actualización de un valor futuro, lo que da el sentido adecuado para la obtención de máximos así como del objetivo económico. Se muestra con un ejemplo cómo se puede llegar a la resolución de dicho tipo de problemas desde dos caminos bien distintos: el primero basado en la aplicación de las técnicas clásicas de optimización de funciones, mientras que el segundo enfoque se basa en los conceptos de tasa de crecimiento instantáneo de una inversión y de coste de oportunidad.

1. INTRODUCIÓN

El estudio de la optimización de funciones de una variable forma parte del currículo de matemáticas tanto a nivel de bachillerato como en muchos de los primeros cursos universitarios. Normalmente, en la práctica de aula, después de la introducción de los correspondientes conceptos y resultados, así como de una serie de actividades de manipulación y rutina en torno a las técnicas básicas del cálculo de extremos de funciones se presta atención al cálculo de óptimos de funciones en diferentes contextos: económicos (maximización de beneficios, minimización de costes), geométricos (minimización de distancias, maximización de volúmenes), etc. El trabajo que aquí se presenta introduce un nuevo tipo de problemas de optimización de tipo económico cuyo objetivo es la determinación del momento óptimo en que debe realizarse una determinada transacción económica para maximizar el valor de dicha transacción. Por lo que los autores sabemos, este tipo de problemas no han sido introducidos previamente en bachillerato, y en cierto modo, como después se verá en los detalles del desarrollo, ello es lógico, ya que parten de funciones base que son crecientes y por tanto que carecen de máximos sobre intervalos de tiempo no acotados. Para que el problema tenga sentido no sólo matemático, sino también económico, es necesario reinterpretar el mismo en términos económicos introduciendo el concepto de valor actual (también llamado en la literatura económica *actualización*) de un pago futuro. Entendemos por tanto, que la inclusión de este tipo de problemas en bachillerato, especialmente en la modalidad de Ciencias Sociales con alumnado que simultanea las asignaturas de Matemáticas y Economía, puede resultar especialmente interesante para enriquecer su formación.

2. PRELIMINARES

Antes de introducir el tipo de problemas de optimización a tratar, dedicaremos unas líneas a motivar la introducción de los conceptos económicos que se necesitan. Entendemos que en la práctica de aula, sería conveniente que esta parte se realizara de forma coordinada con el/la profesor/a de economía y, ello no sólo porque desde luego esta acción redundará en un ahorro de tiempo en el aula de matemáticas (aspecto, hoy día nada desdeñable), sino también porque esa puesta en escena transmitirá a nuestros alumnos el carácter multidisciplinar que en realidad se persigue con esta propuesta didáctica.

2.1. El concepto de tasa de crecimiento instantánea de una función

Consideremos dos individuos A y B que realizan una inversión de 100€ y 1000€, respectivamente, durante un mismo período (por ejemplo un año). Al cabo del año, el individuo A retira 110€ resultantes de su inversión, mientras que B recibe 1010€. ¿Quién ha hecho la mejor inversión? Una primera respuesta (poco meditada) que algunos alumnos nos ofrecerán será que el rendimiento es el mismo, pues ambos han obtenido 10€. Efectivamente, el rendimiento *absoluto* de la inversión es el mismo: 10€, sin embargo, otros estudiantes observarán que la inversión ha sido mucho mejor para A porque invirtiendo menos dinero (100€) ha conseguido el mismo rendimiento (absoluto) que B con 1000€. Esta respuesta, implícitamente contiene una *relativización* del concepto de rendimiento en una inversión:

$$\text{rendimiento de una inversión} = \frac{\text{valor final} - \text{valor inicial}}{\text{valor inicial}} \tag{1}$$

Con ello, la respuesta a la cuestión anterior es clara:

$$\text{rendim. inversión(A)} = \frac{110 - 100}{100} = 0.1 > 0.01 = \text{rendim. inversión(B)} \tag{2}$$

Observemos de (1) que el numerador indica la tasa de variación que ha sufrido la inversión durante el período considerado (implícitamente de valor unitario). Extendamos ahora este mismo concepto al caso en que el valor inicial (en un instante genérico, digamos, t) está dado por una función f(t) (en el caso anterior de los inversores A y B, esa función es tal que en t = 0, f(0) = valor inicial) y el valor final (en un instante genérico t + Δt) está dado por f(t + Δt) (en el caso anterior de los inversores A y B, esa función es tal que en t + Δt, f(t + Δt) = valor final). Se tendrá entonces que (1) se escribirá en la forma:

$$\frac{\dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}}{f(t)} \tag{3}$$

Si, como en los bancos, el dinero está *continuamente* invertido instante a instante, es decir, el período de inversión (durante el cual capitalizan, esto es, se añaden a la inversión inicial los intereses que van generando continuamente la inversión) cumple que $\Delta t \to 0$, tomando límites cuando $\Delta t \to 0$ en (3), directamente reconocemos que el numerador representa la derivada de la función de inversión f(t) y, aparece así de forma natural el concepto de tasa de crecimiento instantánea (T.C.I.) de una inversión o, más generalmente de una función f(t):

$$\text{T.C.I.}(f(t)) = \frac{f'(t)}{f(t)} \tag{4}$$

El concepto de tasa de crecimiento instantáneo es, como acabamos de introducir, válido para cualquier función matemática f(t), sin embargo, aquí nos interesará aplicarlo a las funciones que en Matemática Financiera proporcionan la evolución temporal P(t) resultante de invertir un capital inicial, también denominado principal, P_0 durante un tiempo t a un tipo de interés r. Por motivos de extensión en estas páginas y sobretodo porque el correspondiente programa de Economía en el bachillerato de Ciencias Sociales lo incluye, asumiremos como conocidas las fórmulas que proporcionan el valor de P(t) (no obstante, no dejamos de aprovechar este momento para subrayar que su deducción en la asignatura de Matemáticas en el nivel educativo referido, es también un tarea asequible y muy interesante desde el punto de vista de la formación multidisciplinar). Dependiendo del tipo de capitalización que se asuma, las fórmulas para P(t) son diferentes:

$$\begin{array}{lclcl} \text{R.C.I.C.D.} & : & P_D(t) & = & P_0(1+r)^t \\ \text{R.C.I.C.C.} & : & P_C(t) & = & P_0 e^{rt} \end{array} \tag{5}$$

donde R.C.I.C.D. denota el régimen de capitalización a interés compuesto discreto y R.C.I.C.C. es la correspondiente versión continua (la cual resulta de permitir que los intereses capitalicen *continuamente* durante el período de inversión, por ello, en lo que sigue asumiremos que trabajamos bajo un R.C.I.C.C., aunque nada impide en el desarrollo asumir un R.C.I.C.D.). Observemos que las funciones de tasa de crecimiento instantáneo para ambos tipos de regímenes de capitalización son:

$$\begin{array}{lclcl} \text{R.C.I.C.D.} & : & \text{T.C.I.}(P_D(t)) & = & \ln(1+r) \\ \text{R.C.I.C.C.} & : & \text{T.C.I.}(P_C(t)) & = & r \end{array} \tag{6}$$

Aunque ello no es el objeto de estas líneas, como una actividad en el aula, podemos proponer que los alumnos justifiquen:

$$\text{T.C.I.}(P_D(t)) < \text{T.C.I.}(P_C(t)) \quad \forall t > 0 \tag{7}$$

o lo que es equivalente: ln(1+r) < r. Para ello, aunque podemos dar una *justificación* gráfica de (7) (véase Figura 1),

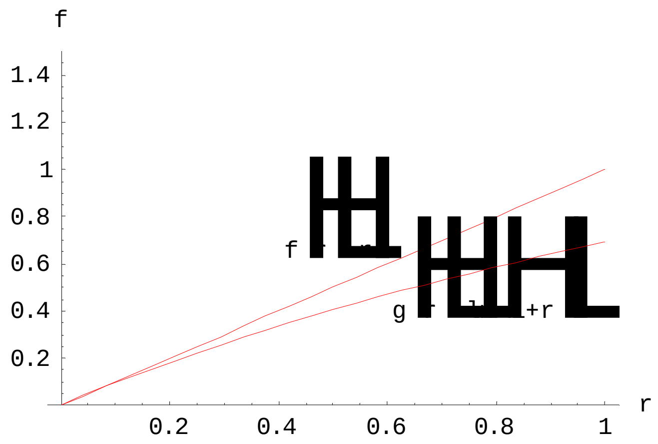

Figura.1. Comparación de las funciones r y ln(1+r) sobre el intervalo (0,1).

podemos sugerir la introducción de la función auxiliar:

$$g(r) = r - \ln(1+r), \quad 0 < r < 1 \tag{8}$$

(obsérvese que al representar r una tasa de tipos de interés en tantos por uno, su valor varía entre 0 y 1) la cual cumple:

$$g(0) = 0, \quad g'(r) = 1 - \frac{1}{1+r} = \frac{r}{1+r} > 0 \tag{9}$$

Lo que justifica que g(r) es una función positiva en el intervalo (0,1), luego a partir de (8) se deduce (7). La intuición económica también valida esta conclusión analítica: el valor de una inversión (o más exactamente, su T.C.I.) es mayor cuando los intereses generados durante el período de inversión se acumulan de forma continua sobre el principal que si lo hacen de forma discreta, tal y como sucede en el régimen de capitalización continuo.

2.2. El concepto de valor actual de un pago futuro

Existen muchas situaciones reales (en ellas se basan los problemas de optimización a los cuales nos referiremos en este trabajo) donde se necesita valorar a día de hoy (t = 0) un pago que tendrá lugar en un tiempo posterior o futuro. Los bancos actúan así diariamente cuando tienen que valorar patrimonios que se recibirán en un futuro. Un ejemplo cotidiano resulta de la siguiente situación: hoy, el propietario de una vivienda la ha alquilado durante un año a un precio mensual de 500€, a continuación se dirige al banco (con su contrato legal de arrendamiento) para solicitar un préstamo. Para el estudio de la concesión del préstamo, el banco le pide al arrendador que aporte su patrimonio y como parte del mismo éste incluye ese contrato de arrendamiento (del cual a día de hoy no ha recibido ni un solo euro, pero del cual posee un documento legal que indica que durante los próximos doce meses cobrará un total de 6000€, fruto de las 12 cuotas mensuales). Nosotros, los ciudadanos de a pie, tal vez no, pero los bancos sí valoran ese documento como parte del patrimonio que posee el arrendador, pero … ¿cómo debe hacerse dicha valoración? Los bancos saben muy bien cómo hacerla. Como punto de partida, hay que observar que para el banco el patrimonio a día de hoy resultante de ese contrato de alquiler no son 6000€ (¡es lógico, el propietario hoy no tiene ese dinero!), pero tampoco es cero euros su patrimonio (¡es lógico, hay un documento legal que asegura que un futuro cobrará los 6000€ en doce cuotas mensuales de 500€!). ¿Cómo valora entonces el banco ese patrimonio que ni es de 0€ ni de 6000€ a día de hoy? La manera de proceder es bastante natural. Para introducirla en el aula procedamos primero con la intuición, planteando a los alumnos cuestiones del tipo: ¿qué tiene mayor valor los 500€ de la primera cuota o los de la última cuota? Si ellos se ponen en la situación del banco, no tardarán en entender que una misma cantidad a recibir (500€ en este caso) tendrá más valor cuanto más cerca esté su cobro, ya que, podremos disponer de ella durante todo el tiempo que transcurre hasta el cobro del siguiente pago (en este caso durante los 11 meses que separan los dos pagos), y con ello, podemos durante ese tiempo invertirlo en el banco a un tipo de interés libre de riesgo (probablemente en los días que corren, un valor muy bajo pero no nulo) y obtener así un rendimiento que sumado a los 500€ invertidos superarán en el mes 12, el valor de 500€ que entonces recibiremos. La forma de valorar estos pagos futuros por parte de los bancos es por tanto sencilla: si vamos a cobrar 500€ dentro de un mes (o bien doce meses), el banco se plantea qué cantidad de dinero habría que invertir hoy, (que corresponde con t = 0) en el banco al tipo de interés r libre de riesgo para que esa inversión se convierta en 500€ dentro de un mes (o bien doce meses). Es claro, que esa cantidad es mayor si queremos que dentro de un mes se convierta en 500€, que en el caso en que el plazo de inversión sea de 12 meses. Las respectivas fórmulas financieras del cálculo de actualizaciones que aparecen en un curso de Economía se obtienen directamente de (5) reinterpretando el contexto adecuadamente: ahora P_0 es el valor a determinar (el llamado valor actual) y $P_D(t)$ (o $P_C(t)$ dependiendo del tipo de régimen de capitalización que aplique el banco) los datos (los pagos que en cada instante t sabemos que vamos a cobrar, en el caso del propietario, las mensualidades por alquiler). Por tanto se deduce que

$$\begin{array}{lclcl} \text{R.C.I.C.D.} & : & \text{V.A.}(P(t)) & = & P(t)(1+r)^{-t} \\ \text{R.C.I.C.C.} & : & \text{V.A.}(P(t)) & = & P(t)e^{-rt} \end{array} \tag{10}$$

Nótese, como en el caso del alquiler, y asumiendo un R.C.I.C.C. con un tipo de interés libre de riesgo r, el patrimonio total del propietario derivado de ese contrato de arrendamiento a día de hoy, resultaría de sumar todos los valores actuales de cada uno de los doce pagos (en ese caso P(t) = 500 sería un valor constante en el tiempo), es decir, resultaría de calcular la suma geométrica siguiente:

$$500e^{-r} + 500e^{-2r} + \cdots + 500e^{-12r} = 500\sum_{j=1}^{12} e^{-jr} = 500e^{-r}\,\frac{1-e^{-12r}}{1-e^{-r}} \tag{11}$$

3. UN EJEMPLO DE OPTIMIZACIÓN

En el apartado anterior ya hemos introducido los ingredientes necesarios para abordar el tipo de programas de optimización que nos interesa. En la práctica empresarial, a menudo el empresario debe de tomar decisiones de optimización cuyo objetivo es la determinación del instante temporal óptimo en que debe ejecutarse una inversión que depende del valor del bien. Como veremos a continuación, muchas veces estos problemas involucran

REVISTA DIGITAL "PROGRAMAS".
CEP DE ALBACETE ISSN: 1988-7922
http://www.abceps.es/revistacep

funciones para el valor del bien base que son crecientes con el paso del tiempo y ello podría dar lugar a pensar que carecen de óptimo si el intervalo temporal es no acotado o, si el intervalo es acotado que dichas funciones toman el valor máximo en el extremo superior derecho del dominio temporal. Un ejemplo sencillo de ello se presenta en el negocio del vino. Para la mayoría de los caldos, su valor (asumiendo una adecuada conservación) es claramente una función, digamos V(t), creciente con el tiempo. En la práctica, muchas veces también es asumible que ese crecimiento es sostenido o cóncavo, es decir, que V(t) cumple

$$V(t) > 0, \quad V'(t) > 0, \quad V''(t) < 0, \quad t \geq 0 \tag{12}$$

por lo que V(t) tiene una forma similar a la mostrada en la Figura 2.

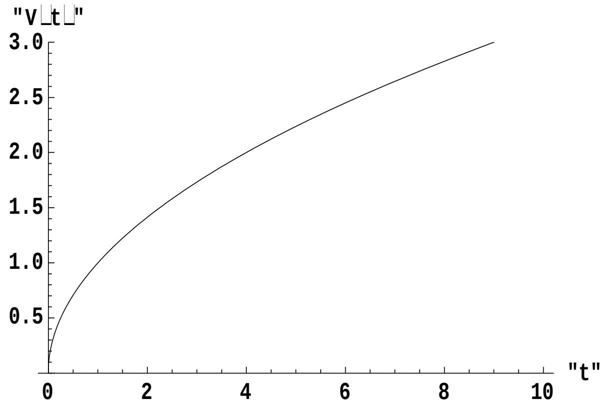

Figura.2. Representación gráfica de una función genérica V(t) que satisface las condiciones (12).

Esto nos podría conducir a la precipitada conclusión de que el mejor momento para vender ese vino es *nunca* o mejor dicho en el infinito o, si hubiera riesgo de que caducara, el extremo superior del intervalo de vida del caldo. Sin embargo, en la práctica, los bodegueros (asesorados por sus agentes financieros) deben decidir el mejor momento en qué deben vender el vino atendiendo al enfoque financiero introducido en el apartado anterior: asumiendo un régimen de capitalización, por ejemplo, R.C.I.C.C., el valor V(t) que el vino tiene en cualquier instante t > 0 (y que el bodeguero puede disponer, a partir de sus datos históricos de venta, parámetros de calidad de la cosecha, etc.) puede ser reinterpretado como el valor actual (no olvidemos que es hoy cuando el bodeguero está interesado en realizar su estudio de optimización) que tiene un pago V(t) futuro que recibirá en el instante t. Por tanto, si el tipo de interés libre de riesgo en el mercado es r, el valor actual del vino para cada instante t > 0 estará dado por la función:

$$A(t) = e^{-rt} V(t), \quad t \geq 0 \tag{13}$$

Calculemos el máximo de esta función (que nos indicará el instante óptimo en el cual el vino debería ser vendido). Aunque podemos hacerlo directamente, para simplificar los cálculos, calcularemos el máximo de la función auxiliar

$$\tilde{A}(t) = \ln(A(t)) = -rt + \ln(V(t)), \quad t \geq 0 \tag{14}$$

(ello es equivalente, debido a que la función logaritmo neperiano es estrictamente creciente y, por tanto, la abscisa de su punto máximo coincide con la de la función A(t)). Los puntos críticos de la función auxiliar son:

$$t_M > 0: \quad \tilde{A}'(t_M) = 0 \Leftrightarrow \frac{V'(t_M)}{V(t_M)} = r \tag{15}$$

¿Es es punto crítico, un máximo local de la función objetivo auxiliar (14) (y por tanto, por lo señalado antes, también un máximo local de la función objetivo (13))? Para ello, sabemos por los resultados del Cálculo Diferencial, que debemos comprobar que la segunda derivada de la función objetivo auxiliar en el punto t_M debe ser negativa:

$$\tilde{A}''(t_M) = \frac{V''(t_M)V(t_M) - 2V'(t_M)}{(V(t_M))^2} < 0 \Leftrightarrow V''(t_M)V(t_M) < 2V'(t_M) \tag{16}$$

pero, obsérvese que si se cumple (12), esta condición se cumplirá, ya que, el término izquierdo de la última desigualdad será negativo y el derecho positivo. Más aún, esto seguirá siendo cierto no sólo en el punto crítico t_M sino en cualquier otro punto del dominio, por lo que la función objetivo auxiliar será cóncava sobre todo su dominio (que es un conjunto convexo), lo que nos permite asegurar que el máximo local es en realidad global, es decir, determina el mejor momento posible para vender el vino.

3.1. Un ejemplo numérico

A continuación, se propone un ejemplo (Chiang, 1999) en el que se muestra que incluso sin que la función V(t) satisfaga las hipótesis (que son sólo suficientes) dadas (12), podemos asegurar que el instante de venta del vino es el óptimo, en el sentido que determina un valor del vino que es máximo global. Supongamos que el valor del vino de una cierta bodega ha sido modelizado por la función

$$V(t) = Ke^{\sqrt{t}}, \quad K, t \geq 0 \tag{17}$$

(observemos que el valor del vino al principio es V(0) = K > 0) y que dicha función no cumple en todo el dominio las hipótesis dadas en (12), ya que:

$$V''(t) = \frac{Ke^{\sqrt{t}}(\sqrt{t} - 1)}{4t\sqrt{t}} > 0 \quad \text{si} \quad t > 1 \tag{18}$$

La función que proporciona el valor actual del vino es:

REVISTA DIGITAL "PROGRAMAS".
CEP DE ALBACETE ISSN: 1988-7922
http://www.abceps.es/revistacep

$$A(t) = Ke^{\sqrt{t}-rt}, \quad t \geq 0 \tag{19}$$

Según (15) su punto crítico t_M se obtiene como sigue:

$$t_M > 0: \quad \frac{V'(t_M)}{V(t_M)} = r \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{t_M}} = r \Rightarrow t_M = \frac{1}{4r^2} > 0 \tag{20}$$

El cual está bien definido por ser positivo. Comprobemos que este punto crítico es un máximo local, para lo cual es más sencillo trabajar con la función auxiliar asociada a A(t):

$$\tilde{A}(t) = \ln(A(t)) = \ln(K) + \sqrt{t} - rt, \quad t \geq 0 \tag{21}$$

cuya segunda derivada cumple

$$\tilde{A}''(t) = -\frac{1}{4t\sqrt{t}} < 0, \quad t \geq 0 \tag{22}$$

por lo tanto, t_M dado en (20) es no sólo máximo local sino también global, y dado un tipo de interés r fijo, el vino debería de venderse en ese momento. Como comprobación del resultado, observemos que el valor actualizado del vino en el momento óptimo es mejor que el valor actual K (obsérvese que esta comparación debe realizarse en un mismo instante, por ejemplo, en t = 0, ya que, como hemos visto en el ejemplo del alquiler de una vivienda, para comparar el valor de dos cantidades de dinero debemos hacerlo en el mismo instante temporal):

$$V(t_M)e^{-rt_M} = Ke^{\sqrt{t_M}}e^{-rt_M} = Ke^{\sqrt{t_M}-rt_M} = Ke^{\sqrt{\frac{1}{4r^2}}-r\frac{1}{4r^2}} = Ke^{\frac{1}{4r}} > K = V(0) \tag{23}$$

Analicemos un poco más la solución, ya que, las matemáticas nos dicen algo que puede no estar en consonancia con la intuición de la mayoría y que debería sorprendernos en parte: el momento del venta del vino es independiente de la calidad actual del vino, es decir, del valor de K; sólo depende del tipo de interés libre de riesgo que haya vigente en el mercado. Quizás surjan entonces en el aula muchas otras cuestiones que atañen al mundo real del mercado bodeguero y financiero que los estudiantes pedirán al profesor de Economía que les explique y que sin duda enriquecerán esta actividad que una vez más manifiesta su carácter multidisciplinar.

4. OPTIMIZACIÓN Y COSTE DE OPORTUNIDAD

Existe una deliciosa solución del problema anterior que no atiende a argumentos matemáticos, sino económicos y que merece la pena desarrollar aquí tanto por su brevedad y sencillez, como porque posibilita de nuevo evidenciar el carácter multidisciplinar de esta actividad. La solución se basa en el importante concepto económico de *coste de oportunidad*. Sin entrar en una definición rigurosa, por coste de oportunidad se entiende al valor de aquello a lo que estamos renunciando cuando tomamos una decisión. En efecto,

REVISTA DIGITAL "PROGRAMAS".
CEP DE ALBACETE ISSN: 1988-7922
http://www.abceps.es/revistacep

cada vez que en la vida diaria tomamos una decisión, por ejemplo, realizar una determinada inversión frente otras muchas posibilidades, dejamos de poder hacer con el dinero de esa inversión otras muchas cosas que nos pueden interesar a nivel financiero y ese desaprovechamiento debe valorarse, ya que, tiene un coste, denominado coste de oportunidad. En la situación óptima el coste de oportunidad debe ser nulo (o muy pequeño), es decir, al tomar la mejor decisión no se renuncia a nada (o a casi nada). En el caso del problema del vino, el propietario del vino tiene en cada instante dos opciones: dejar que el vino madure en barrica y venderlo más tarde o, vender en ese momento el vino e invertir ese dinero en el banco a cierto tipo de interés r libre de riesgo. ¿Qué opción es la óptima? Desde luego, hemos empezado estas páginas introduciendo la herramienta matemática adecuada para medir el rendimiento de una inversión: la T.C.I. y, en el instante óptimo en que el propietario del vino debe venderlo, el coste de oportunidad ha de ser nulo, es decir, para ambas inversiones sus T.C.I. deben ser idénticas en el instante óptimo de venta, por tanto, la T.C.I. del valor del vino (una primera opción de inversión: mantener el vino) debe de ser igual a la T.C.I. que resulte de vender hoy el vino a su precio actual K y poner el dinero en el banco a un tipo de interés r bajo un cierto tipo de régimen de capitalización que supondremos es R.C.I.C.C (sería una segunda opción), es decir, debemos encontrar el valor t_M tal que:

$$\mathrm{t_M} > 0: \quad \text{T.C.I.}(V(t_M)) = \text{T.C.I.}(P_C(\mathrm{t_M})) \tag{24}$$

En (6) ya se ha visto que el segundo miembro de esta ecuación es r (considerando allí que P_0 = K), luego, realizando los cálculos para el primer término se tendrá:

$$\mathrm{t_M} > 0: \quad \text{T.C.I.}(V(\mathrm{t_M})) = \frac{Ke^{\sqrt{\mathrm{t_M}}}\dfrac{1}{2\sqrt{\mathrm{t_M}}}}{Ke^{\sqrt{\mathrm{t_M}}}} = r = \text{T.C.I.}(P_C(\mathrm{t_M})) \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{t_M}} = r \tag{25}$$

Que nos conduce a la misma solución encontrada por las técnicas analíticas:

$$t_M = \frac{1}{4r^2} \tag{26}$$

4.1. Algunas observaciones

Concluida la resolución del problema desde los dos enfoques, podemos proponer analizar el mismo desde una perspectiva global. Para ello se proponen algunas cuestiones:

- ¿A qué tipo de situaciones es realista aplicar este tipo de modelos de optimización? Busca algún ejemplo
- Todo modelo matemático que intenta reflejar una situación real necesita hacer una serie de simplificaciones que le permiten (recogiendo lo esencial de la realidad que pretende modelizar) hacerlo analíticamente operativo al nivel formativo de quien lo resuelve. ¿Cuáles son las simplificaciones que se han hecho en este modelo? ¿Cómo podría mejorarse el modelo, aunque ello implique una función objetivo más

REVISTA DIGITAL "PROGRAMAS".
CEP DE ALBACETE ISSN: 1988-7922
http://www.abceps.es/revistacep

complicada?
- ¿Cómo se modificaría el estudio aquí presentado si en lugar de asumir un R.C.I.C.C. se trabajase bajo un R.C.I.C.D.? ¿Cuál sería entonces el valor de t_M? ¿Dicho valor sería mayor o menor que el obtenido bajo un R.C.I.C.C.?

Algunas sugerencias para trabajar estas cuestiones son las siguientes: para la primera cuestión puede pensarse en bienes duraderos en el tiempo y que con el paso del mismo aumentan de valor. Ejemplos en este sentido son: la madera de los árboles, las antigüedades, etc. Observemos respecto de la segunda cuestión que la función objetivo puede hacerse más realista descontando del valor del vino (o de cualquier otro bien) los costes de almacenamiento en que se incurren al mantenerlo bien conservado para que con el paso del tiempo pueda aumentar el valor de esa inversión. Por otra parte, una hipótesis poco realista que se ha asumido en el desarrollo anterior de la solución es que el tipo de interés r es contante con el tiempo; podemos entonces suponer en una generalización del modelo donde r = r(t). En ese caso, es sencillo ver que el instante óptimo de venta del vino dado por (15) ahora se determina según la relación:

$$t_M > 0: \quad \frac{V'(t_M)}{V(t_M)} = r(t) + tr'(t) \qquad (27)$$

Para ampliar el estudio comparativo que se propone en la última cuestión, invitamos al lector interesado consultar el texto (Cortés et al., 2006).

5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado un ejemplo de actividad multidisciplinar Matemáticas-Economía que puede ser aprovechada en un curso de bachillerato o universitario con intensificación en ambas materias, dentro del bloque temático de optimización en funciones de una variable. El problema aquí abordado posibilita la discusión de numerosos aspectos de ambas disciplinas involucradas que pueden permitir a los alumnos entender desde un ejemplo claro y sencillo la verdadera necesidad de considerar ambas materias en permanente conexión para conseguir una formación integral más consistente. Por tanto, creemos que estas líneas contribuyen a que los alumnos consideren la formación que reciben a través de las diferentes asignaturas del currículo como partes de un todo común que están interrelacionadas.

REFERENCIAS:

Chiang, A., (1999). Métodos Fundamentales de Economía Matemática, (3a ed). Madrid, España. McGraw-Hill.

Cortés, J.C. et al. (2006). Problemas y Modelos Matemáticos para la Administración y Dirección de Empresas IV. Valencia, España. Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia.

■ Autoría

Gema Calbo Sanjuán (Jefa de departamento de Matemáticas)
I.E.S. Els Évols (L'Alcúdia, Valencia)
TFNO: 96 2996566
CORREO: gemacalbo@gmail.es
PÁGINA WEB: http://www.ieselsevols.gva.es

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemática Aplicada (Universidad Politécnica de Valencia)
963877000-ext.88289
CORREO: jccortes@mat.upv.es
PÁGINA WEB: http://upv.es/mat