

El Solitario: investigar jugando.

Autor: Antonio Bueno Aroca.
IES Parque Lineal, Albacete,
Departamento de Sistemas Informáticos, UCLM, Albacete.
Antonio.Bueno@uclm.es

Temática: Pensamiento y razonamiento matemático.

Palabras clave: Solitario, Juego, Investigación, Representación.

Resumen

Jugar es importante para el desarrollo de la persona a cualquier edad. En particular, la edad adolescente, momento crítico para el desarrollo de nuestra capacidad de abstracción, es una etapa en la que es recomendable utilizar el juego como herramienta didáctica. En este trabajo se presenta el modo en el que un conocido juego se puede utilizar como objeto de investigación, proponiendo una actividad que pretende excitar la curiosidad de quienes conozcan el juego y disfruten, o hayan disfrutado en alguna ocasión, con su práctica.

1. INTRODUCCIÓN.

El estudio de un juego matemático constituye una aventura que se convierte, en ocasiones, en una obsesión. Podemos comenzar el estudio de un juego planteándonos diferentes objetivos, uno en particular muy estimulante es la investigación de soluciones, métodos y relaciones con otros campos de las matemáticas, como podemos encontrar en (Hinz et al., 2005) y (Berend y Sapir, 2006) con respecto a la torre de Hanoi y la teoría de grafos, o en (De Guzmán, 2003), con respecto al solitario y el grupo de Klein. Otro objetivo, quizá no excesivamente explotado, lo podemos encontrar en también en (De Guzmán, 2003), se trata del objetivo didáctico. Por lo general, estos juegos se presentan a los alumnos como algo ajeno al control de cualquier estructura, como un objeto misterioso y diabólico que debemos resolver a golpe de puro ingenio basado en la estrategia de la fuerza bruta, también conocida como estrategia de ensayo y error. Sin embargo, en juegos tan conocidos como Tangram, cubo de Rubik, torre de Hanoi y Solitario, entre otros, se pueden establecer estrategias lleven a un investigación formal de resultados y a un estudio coherente a muy diferentes niveles.

El juego del Solitario está diseñado, como su propio nombre indica, para ser jugado por una sola persona. Sus orígenes son bastante inciertos. Podemos encontrar un antecedente en el juego de la zorra y los gansos (Masters, 1997), sin embargo la opinión más extendida es que el juego habría sido inventado en Francia durante el siglo XVII, y su inventor sería un por un noble encarcelado en La Bastille. (García Déniz, 1997).

El tablero de juego esta formado por 33 huecos distribuidos como vemos en la figura 1, en cada hueco se coloca una bola, excepto en el hueco central. Las reglas de movimiento son sencillas, ya que una bola se puede mover saltando a otra en dirección horizontal o vertical, siempre que tras la bola saltada haya un hueco libre, además, la bola saltada es quitada del tablero. El objetivo del juego es eliminar todas las bolas del tablero, excepto una, que debe quedar ubicada en el centro del mismo.

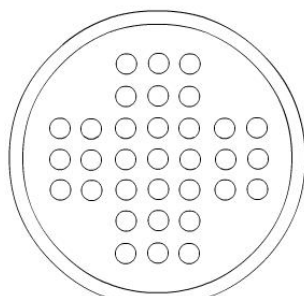


Figura 1

No es sencillo, al principio, conseguir el objetivo del juego. Sin embargo, aplicando alguna estrategia de simplificación de movimientos, se puede lograr si se practica o suficiente. Una vez alcanzado el primer objetivo surgen de forma natural las modificaciones con las que rentabilizar la habilidad conseguida en el manejo de las posiciones del juego. Una modificación puede ser dejar al inicio del juego un hueco en un lugar distinto al centro del tablero, o adoptar como posición inicial una estructura compuesta por una cantidad menor de bolas y marcar como objetivo otra disposición.

A continuación, en este trabajo se presentan estrategias para la resolución del juego del Solitario original. En el tercer epígrafe se presenta un software especialmente diseñado para práctica este juego con posibilidad de incluir variantes de posición y de tablero. También se comentan ciertas capacidades extras que se han incluido para potenciar las posibilidades de investigación del juego. El cuarto apartado se dedica a incluir una notación adecuada para manejar posiciones y movimientos sobre al tablero, además de algunos resultados interesantes para establecer relaciones entre posiciones. En los apartados quinto y sexto se establecen relaciones entre posiciones, con la pretensión de servir de inspiración para la confección de actividades para realizar con grupos de alumnos. En el séptimo epígrafe se presentan algunas curiosidades obtenidas a partir de los resultados de los apartados anteriores.

2. ESTRATEGIAS PARA RESOLVER EL JUEGO DEL SOLITARIO.

Se pueden marcar unas pautas para presentar actividades en clase utilizando este juego. Para ello sería conveniente que cada alumno contase con su propio juego del Solitario. Dependiendo de las posibilidades que se tengan, se pueden construir juegos utilizando diferentes materiales, como cartulina o madera, aunque también puede utilizarse el software que se presentará en el apartado siguiente de este trabajo, o alguno similar que pueda encontrarse disponible en Internet.

A continuación se dan dos estrategias para jugar con ciertas garantías de éxito, siguiendo la notación de (De Guzmán, 2003), en cada una de ellas se definirá un conjunto de bolas, llamado *Conjunto básico* compuesto por las bolas que deben desaparecer tras los movimientos, y una bola especial, llamada *Catalizador* que será la única que permanezca en el tablero tras la ejecución de los movimientos, bola que debe tener al final la misma posición que al principio. Los mini tableros usados para definir las estrategias están formados por lo únicos cuadros que deben usarse para realizar los movimientos.

2.1. Posición de “L”

Aparecen cuatro bolas en forma de ele, al ejecutar la secuencia de movimientos que se ve en la figura 2, las tres bolas del palo de la ele desaparecen. En lo que sigue, nos referiremos a este macromovimiento como el borrado de la ele.

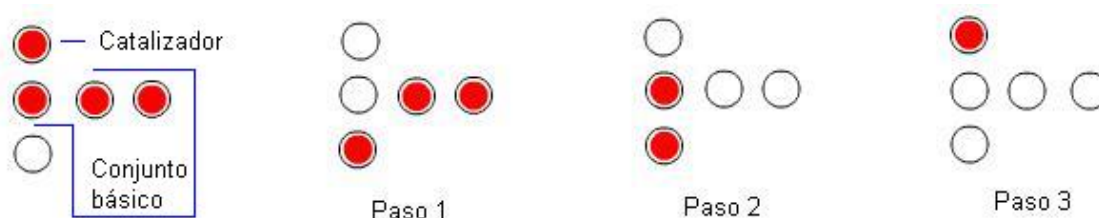


Figura 2

2.2. Extensión de la posición de “L”

Utilizando la estrategia anterior varias veces, podemos eliminar una gran cantidad de bolas, agrupando muchos movimientos en un solo *Macromovimiento*, tal como vemos en la figura 3.

Este macro movimiento consiste en la aplicación del borrado de la ele tres veces consecutivas, de tal forma que esta extensión se puede ampliar a estructuras similares pero con un mayor número de bolas. Así, se pueden eliminar una gran cantidad de bolas de su posición, favoreciendo la posibilidad de recordar la secuencia seguida desde una determinada posición para llegar a otra. De este modo, se pueden establecer algunas posiciones “puente” desde la posición de inicio hasta la posición final, partiendo el problema completo en otros más sencillos.

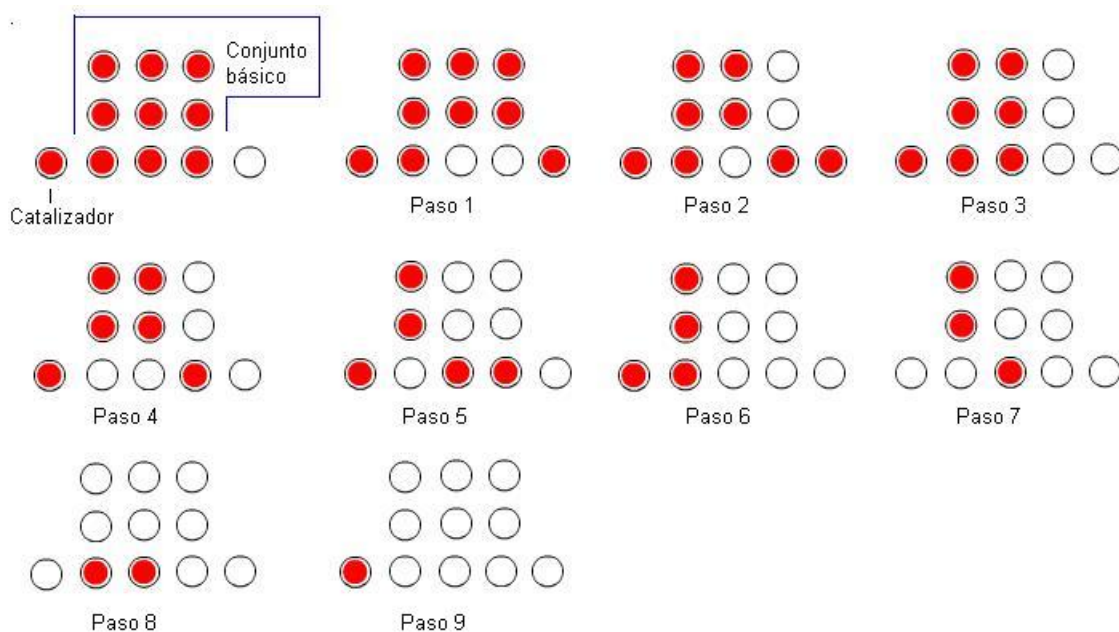


Figura 3

3. PRESENTACIÓN DEL SOFTWARE.

Se trata de una aplicación hecha con Adobe Flash CS4 Professional, esta por tanto publicada como página web, permitiendo su uso desde cualquier computadora con conexión a Internet. En la figura 4 vemos la pantalla de inicio, en la que ofrecen varios botones:

- Instrucciones: da acceso a un resumen de las diferentes utilidades que el software ofrece. También se explica el modo en que se pueden mover las bolas y las posibilidades de almacenar jugadas momentáneamente, utilizando algunos de los botones que hay en las pantallas de los tableros.
- Juego con 12, 33, 65 y 105 bolas: es un conjunto de cuatro botones. Cada uno de ellos da acceso a un tablero cuyas dimensiones de cuadrado central son, respectivamente, 2×2, 3×3, 4×4 y 5×5.

Tablero de prácticas: da acceso a una pantalla en la que se pueden practicar movimientos, en particular incorpora las posiciones de los cuatro macromovimientos propuestos en (De Guzmán, 2003).

3.1. Tableros de diferentes dimensiones.

Aunque en este trabajo se presenten únicamente actividades de investigación sobre los tableros de 12 y 33 bolas, el planteamiento a largo plazo del mismo es promover la investigación en las extensiones del tablero con 65 y 105 bolas.

Usar el Solitario para investigar jugando

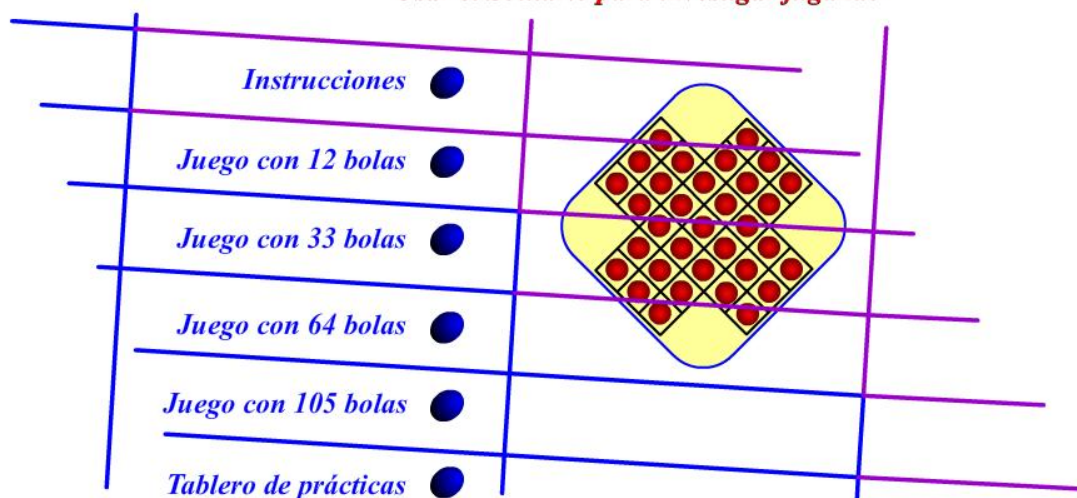


Figura 4

En todos los tableros las bolas se pueden mover utilizando el procedimiento de arrastrar y soltar, de manera que al mover una bola fuera del tablero, ésta desaparece. Se ofrecen dos tableros en cada una de estas pantallas, uno, llamado *Tablero*, sobre el que desarrollar las jugadas y otro, denominado *Réplica*, en el que se pueden almacenar temporalmente las posiciones de interés. Así, cuando estamos realizando una secuencia, si llegamos a una posición intermedia que nos parece interesante, podemos almacenar esta posición en el tablero Réplica. Después, si la evolución de la jugada no nos parece interesante, podemos volcar la posición almacenada en la Réplica sobre el Tablero, y estudiar una secuencia distinta aplicada sobre la misma posición intermedia. Los botones que se ofrecen son:

- Nuevo juego: coloca las bolas en su posición inicial.
- Activar borrado: permite cambiar el modo en el que podemos borrar bolas del tablero, haciendo una bola se borre al hacer clic sobre ella, no funcionando entonces el procedimiento arrastrar y soltar. No está disponible en el modo de 12 bolas.
- Copiar posición: realiza una copia de la posición del Tablero sobre la Réplica.
- Volcar posición: realiza una copia de la posición de una Réplica sobre el Tablero.
- Retorno a menú: vuelva al menú de inicio.

3.2. Tablero de prácticas.

Es un apartado en el que se pueden colocar las bolas sobre los diferentes tableros en la disposición que se desee. También se ofrecen botones para estudiar los macromovimientos concretos que podemos observar en la figura 5.

En este caso las bolas no se borran al quitarlas del tablero, sino cuando son llevadas hasta una zona denominada *Tragabolas*.

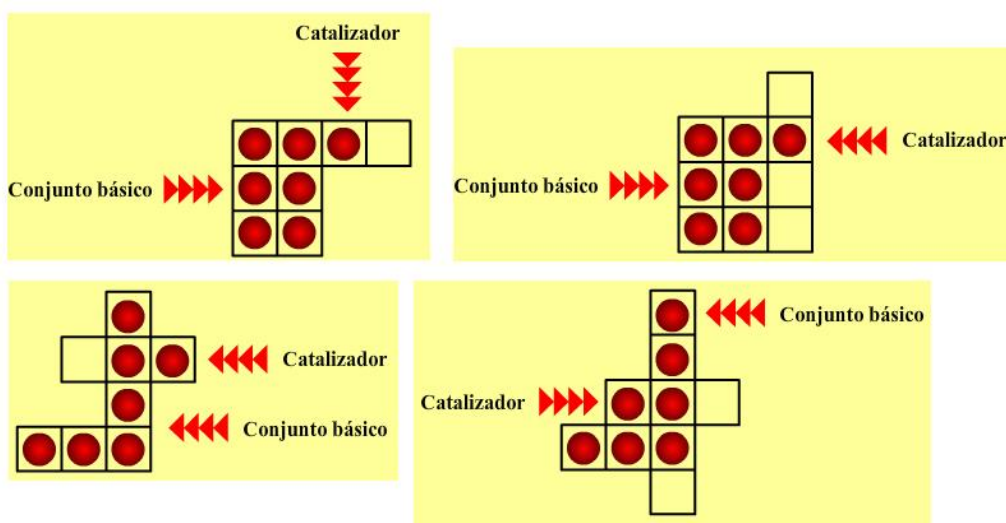


Figura 5

4. NOTACIÓN Y DUALIDAD.

Necesitamos utilizar un modelo de notación para describir una posición en el tablero, y también para describir los movimientos. Para ello utilizaremos letras sobre el eje horizontal y números sobre el vertical, como se muestra en la figura siguiente:

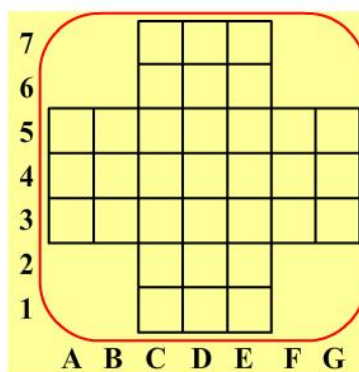


Figura 6

Para ilustrar el modo de proceder, a modo de ejemplo se ofrece en la figura 7 la posición P descrita de la forma: P[A3,A4,B4,C4], utilizando ordenación alfanumérica para escribir los lugares ocupados en una posición.

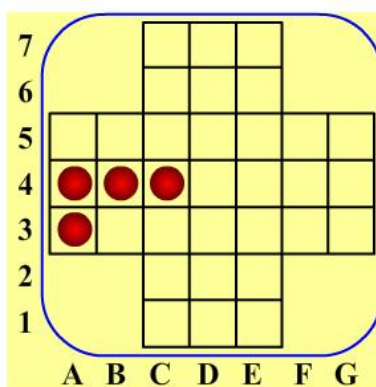


Figura 7

Un movimiento será denotado por la dirección de la celda origen del salto y la dirección de la celda final, separados por dos puntos, por ejemplo A1:A5 denota el salto que, en la posición de la figura 7, hace que se quite la bola que ocupa la celda A4, pasando la bola que está en A3 a ocupar la celda A5. La nueva posición sería: Q[A5,B4,C4], y el salto se describirá de la forma:

$$P \xrightarrow{A1:A5} Q$$

Denotaremos una secuencia de movimientos escribiendo los movimientos que la forman separados por comas. El último movimiento de una secuencia llevará detrás un punto. Por ejemplo, con la secuencia: S = A1:A5,C4:A4,A5:A3. desde la posición de la figura 7 pasaríamos a la posición que consta de una sola bola ubicada, es decir, P'[A3].

La forma de escribir este proceso será:

$$P \xrightarrow{S} P'$$

Utilizaremos tres simplificaciones para reducir el tamaño de las secuencias:

- Dada la posición de la figura 7, denotaremos por [A1:C4] a la secuencia de borrado de ele en la que sólo queda en su lugar la bola de A1, desapareciendo todas las demás. Es decir: [A1:C4] = A1:A5,C4:A4,A5:A3.
- Dada la posición inicial de la figura 8, denotaremos por [C6:A3] a la secuencia que permite llevar a la posición final de la misma figura, aplicando el borrado de la ele extendido.

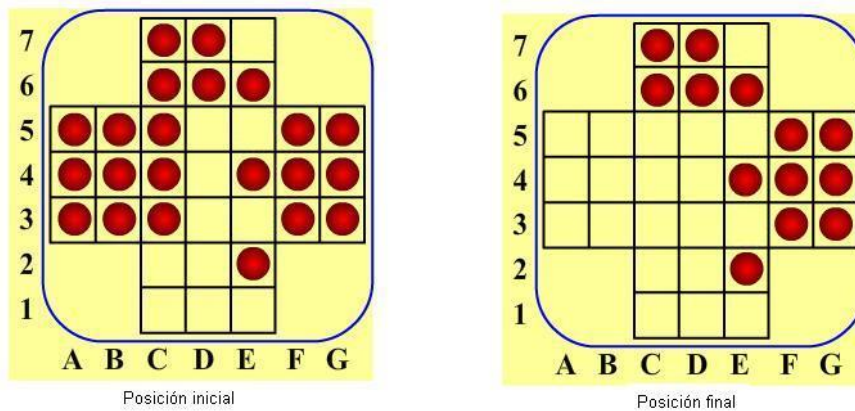


Figura 8

Es decir:

$$[C6:A3] = [C4:A3, [C5:A4, [C6:A5.$$

Lo que expandiendo más la secuencia es:

$$[C6:A3] = C4:C2, A3:C3, C2:C4, C5:C3, A4:C4, C3:C5, C6:C4, A5:C5, C4:C6.$$

- Si una misma bola da varios saltos seguidos en una misma secuencia podemos agruparlos utilizando como notación el punto donde la bola está ubicada al inicio y donde queda ubicada al final. Por ejemplo, en la posición de la figura 8, podemos mover la bola que ocupa la posición G3, y mediante tres saltos consecutivos llevarla hasta la posición E7, quitando del tablero las bolas que ocupan las posiciones F3, E4 y E6. De manera que:

$$G3:E7 = G3:E3, E3:E5, E5:E7.$$

Damos a continuación dos definiciones que necesitaremos para establecer relaciones entre posiciones.

Def.- Dada una posición P , diremos que P_d es su posición dual si en aquellos lugares ocupados en P están libres en P_d y todos los que están libres en P están ocupados en P_d .

La figura 9 ilustra esta definición.

Def.- Diremos que dos lugares, $L1$ y $L2$, están en relación secuencial si dada la posición P , en la que todos los lugares están ocupados excepto $L1$ ($P = Q[L1]_d$), existe una secuencia S , tal que: $P \xrightarrow{S} P'$, con posición de llegada $P'[L2]$.

Es decir, quitando la bola de la posición $L1$, alcanzamos como final una posición en la que solo hay una bola en la posición $L2$.

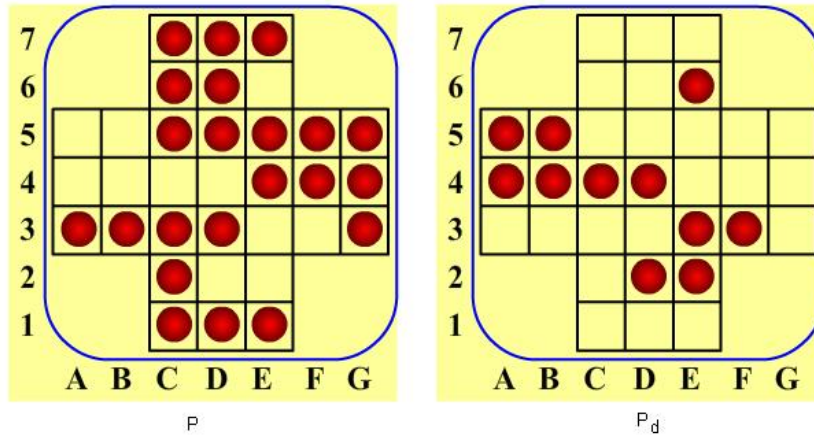


Figura 9

Con las siguientes propiedades se establece la simetría de la relación secuencial.

Prop.- Sea P una posición cualquiera, y s un salto permitido, tal que $P \xrightarrow{s} P'$, entonces S está permitido en la posición P'_d , y además $P'_d \xrightarrow{s} P_d$.

Dem.-

Supongamos que $s = L1 : L3$, con $L1 \in P$ y $L3 \notin P$, y sea $L2 \in P$ la posición sobre la que se salta. Entonces tendremos:

$$P' = \{P - \{L1, L2\}\} \cup \{L3\}$$

Calculando ahora el dual de este conjunto de posiciones, tendremos que:

$$P'_d = \{P_d - \{L3\}\} \cup \{L1, L2\}$$

Por lo tanto $s = L1 : L3$ está permitido en P'_d .

Además tendremos: $P'_d \xrightarrow{s} (P'_d)'$, con $L1 \notin (P'_d)'$, $L2 \notin (P'_d)'$ y $L3 \in (P'_d)'$, manteniéndose el resto de posiciones igual, es decir, que $(P'_d)' = P_d$.

□

Prop.- La relación secuencial entre lugares en un tablero de Solitario francés de 33 bolas es simétrica.

Dem.-

Supongamos que $L1$ está en relación secuencial con $L2$, esto significa que hay una secuencia de saltos desde $P[L1]_d$ hasta $P'[L2]$, es decir:

$$P[L1]_d \xrightarrow{s_1} P_1 \xrightarrow{s_2} P_s \dots \xrightarrow{s_{(n-1)}} P_{n-1} \xrightarrow{s_{(n)}} P'[L2]$$

Aplicando ahora la propiedad anterior a cada uno de los saltos de esta secuencia tendremos:

$$P'[L2]_d \xrightarrow{s(n)} (P_{n-1})_d \xrightarrow{s(n-1)} (P_{n-2})_d \cdots (P_2)_d \xrightarrow{s2} (P_1)_d \xrightarrow{s1} P[L1]$$

Cumpléndose así el enunciado.

5. ESTUDIO QUITANDO LA BOLA CENTRAL.

En este apartado se presentarán secuencias que, aplicadas sobre determinadas posiciones iniciales, ponen en relación secuencial algunos puntos del tablero con el hueco del centro. Con ellas no se pretende en absoluto que el lector deje de jugar, y únicamente se incluyen algunas necesarias para conseguir los curiosos resultados a los que se llega.

La una secuencia podría ser la siguiente:

S = D2:D4,F3:D3,D4:D2,E1:E3,E4:E2,C1:E3,C2:E4,[C6:A3,E5:C5,D7:D5],[D5:C7,G5:E5,D5:F5,G3:G5, E7:E5],[E4:G5.

La posición alcanzada es la que se muestra en la figura 10, por lo que la continuación ahora puede ser cualquiera de las siguientes:

- S1 = S,F4:D4.
- S2 = S,E4:G4.

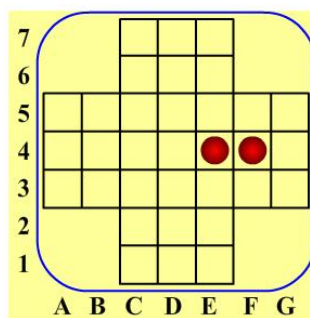


Figura 10

Por lo tanto, gracias a los resultados ofrecidos en el apartado anterior, podemos decir que las posiciones D4 y G4 están en relación secuencial. Ahora, sin más que girar el tablero se obtiene de forma inmediata que la posición D4 está relacionada secuencialmente con las posiciones A4, D1, D7 y G4. En la figura 11 podemos ver la figura que se obtiene al unir mediante líneas las posiciones relacionadas secuencialmente.

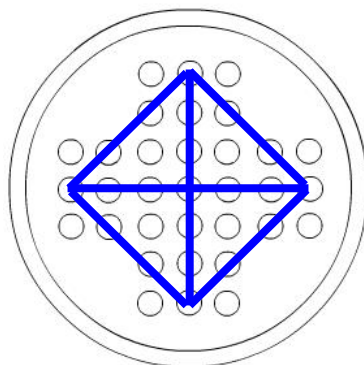


Figura 11

6. ESTUDIO QUITANDO OTRAS BOLAS.

Si realizamos ahora un estudio buscando posiciones relacionadas secuencialmente, nos encontramos con los resultados que se comentan en los siguientes subapartados.

6.1. Quitando la bola de la posición C4.

Partiendo de la posición $P[C4]_d$, podemos aplicar la secuencia:

$S = [C2:A3, [C6:A5, A4:C4, C1:C5, [F5:C7, [F3:D1, G3:E3, F5:F3, G5:G3, [E4:G3.$

Podemos observar la posición alcanzada en la figura 12.

Y tenemos dos posibles terminaciones:

- $S1 = S, E4:C4.$
- $S2 = S, D4:F4.$

Como vemos, el lugar C4 está relacionado secuencialmente consigo mismo y con el lugar F4.

De nuevo, partiendo de $P[C4]_d$, podemos desarrollar otra secuencia:

$S' = E4:C4, [E6:G5, [E2:G3, G4:E4, E1:E3, E7:E5, [D5:E3, [B5:D7, [B3:D1.$

También con dos posibles finales:

- $S1' = S', A5:C5, A3:A5, B3:B5, C4:C6, A5:C7.$
- $S2' = S, A3:C3, A5:A3, B5:B3, C4:C2, A3:C1.$

De manera que las posición C4 está relacionada secuencialmente con las posiciones C1, C7 y F4.

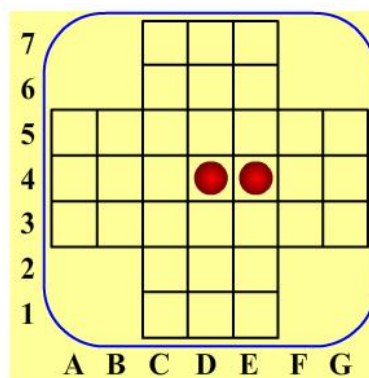


Figura 12

En la figura 13 podemos ver la figura que se obtiene al unir mediante líneas estas posiciones.

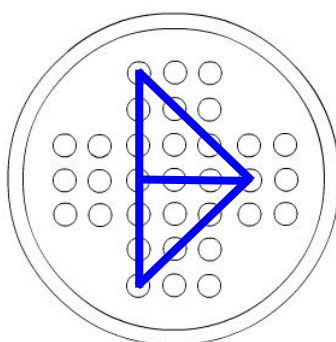


Figura 13

6.2. Quitando la bola de la posición C5.

Partiendo de la posición $P[C5]_d$, podemos aplicar la secuencia:

$S = [F5:D7, C7:C5, E3:E5, G4:E4, [E4:G5, G3:E3, [C2:A5, C1:C3, E1:C1, E2:C2, [D3:C1.$

Con tres posibles finales:

- $S1 = S, E3:C3, E4:C4, C3:C5.$
- $S2 = S, E3:C3, E4:C4, C4:C2.$
- $S3 = S, D3:F3, D4:F4, F3:F5.$

Podemos entonces concluir que la posición C5 está secuencialmente relacionada consigo misma, y con las posiciones de los lugares C2 y F5. En la figura 14 podemos ver la figura que se obtiene al unir mediante líneas estas posiciones.

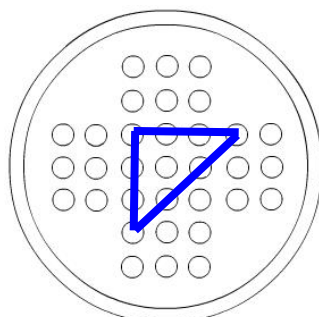


Figura 14

7. RELACIONES ENTRE POSICIONES.

En este apartado utilizaremos las relaciones obtenidas en el apartado anterior para presentar dos curiosidades que relacionan al juego del Solitario con otros elementos matemáticos.

En (De Guzmán, 2003) se presenta la relación entre las posiciones del solitario y los elementos del grupo de Klein, relación que nos permite decidir si una posición es inalcanzable desde otra, gracias a que el producto de las elementos del grupo en las celdas ocupadas en una posición es un invariante por un salto. En la figura 15 podemos ver la tabla de la operación asociada a un grupo de Klein y su relación con el Solitario.

.	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

Grupo de Klein

		a	b	ab		
		b	ab	a		
a	b	ab	a	b	ab	a
b	ab	a	b	ab	a	b
ab	a	b	ab	a	b	ab
		ab	a	b		
		a	b	ab		

Figura 15

7.1. Estrellas de ocho puntas.

Uniendo las posiciones de las bolas relacionadas secuencialmente nos encontramos con las curiosas disposiciones que podemos observar en la figura 14.

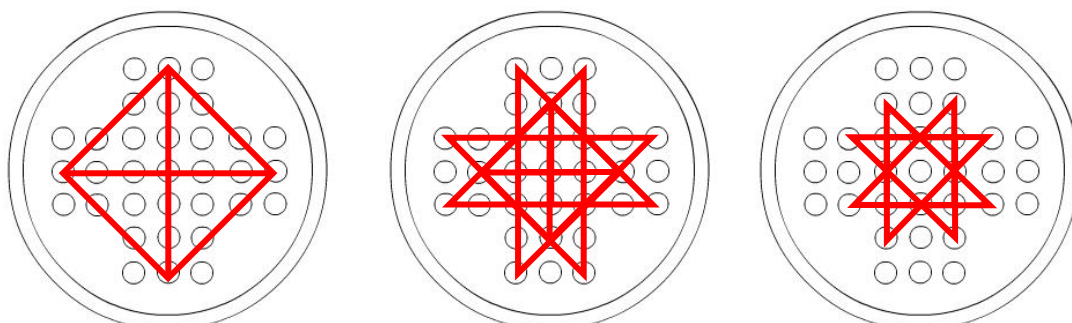


Figura 14

Estos dibujos se obtienen uniendo los lugares de en función de la cantidad de ellos que se encuentran en relación secuencial. Así, el cuadrado y las dos diagonales se corresponde a la unión de cinco lugares relacionados con D4. La estrella de ocho puntas en cuyo centro hay dos cuadrados con diagonales se obtiene con las cuatro uniones de los lugares relacionados con C4, E4, D3 y D5. Por último la estrella de ocho punta se obtiene uniendo los lugares relacionados con C3, C5, E3 y E5. Todas las posiciones del Solitario están en alguna de estas relaciones y solo en una.

7.1. Cuadrado mágico.

Otra curiosidad que se puede apuntar con respecto a esta distribución de soluciones es su relación con la disposición de las cifras del 1 al 9 en forma de cuadrado mágico. Para ello colocaremos una cifra en cada una de las agrupaciones descritas en el apartado anterior. Así, en cada posición de la agrupación de cinco lugares colocaremos la cifra 5.

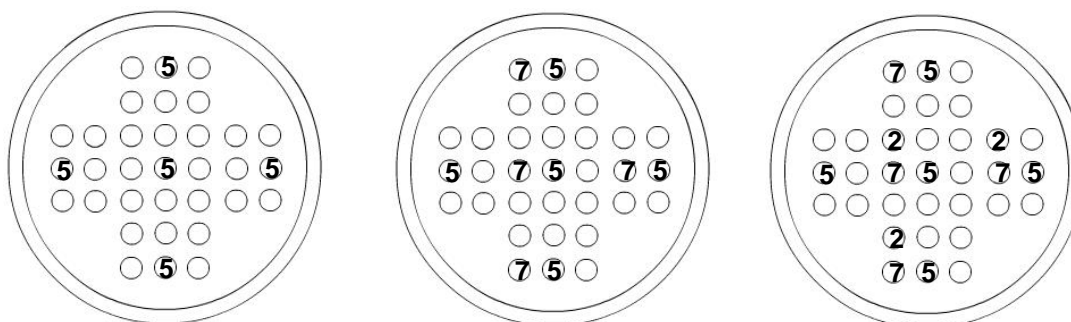


Figura 15

A continuación, en las relaciones cuatro posiciones colocamos las cifras 7, 9, 1 y 3. Por último en las relaciones de tres posiciones colocaremos las cifras 2, 4, 6 y 8. En la figura 15 tenemos

un ejemplo de la colocación de una cifra de cada tipo, y en la figura 16 el resultado de la colocación de todas las cifras.

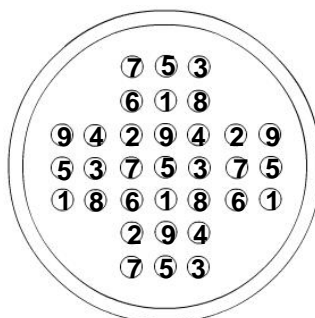
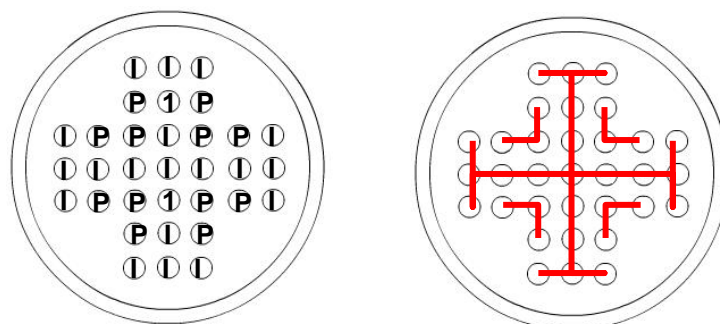


Figura 16

Como podemos observar, en las nueve posiciones centrales quedan las nueve cifras formando un cuadrado mágico. Queda así abierto un amplio abanico de posibilidades para relacionar este juego con otros, y para establecer hipotéticas conexiones curiosas. Por ejemplo, si marcamos las posiciones en las que quedan colocadas cifras pares y las unimos y hacemos lo mismo con las posiciones en las que quedan colocadas cifras impares obtenemos una cruz, tal y como podemos ver en la figura 17.



8. CONCLUSIÓN.

El estudio de las posiciones relacionadas en el tablero de 33 bolas presentado pretende servir de inspiración para el diseño de actividades dirigidas a grupos de alumnos de secundaria y bachillerato. Para ello se ha diseñado la herramienta que se presenta, ofreciendo la posibilidad de ampliar el estudio de este juego a tableros de otras dimensiones. Este campo está completamente abierto y, hasta donde ha podido llegar el autor de este artículo, los resultados obtenidos que relacionan el cuadrado mágico de orden 3 con el Solitario no son extrapolables a los otros tableros que se ofrecen en el software.

REFERENCIAS

- De Guzmán, M. (2003). Cuentos con cuentas (2ª Ed.). España. Nivola.
- Hinz, M. Klavzar, S. Milutinovic, U. Parisse D. Petr, C (2005). Metric properties of the Tower of Hanoi graphs and Stern's diatomic sequence. European Journal of Combinatorics, vol26. pg15. ELSEVIER.
- Berend, D. Sapir, A. (2006). The diameter of Hanoi graphs. Information Processing Letters, vol98, pg6. ELSEVIER.
- Masters, J. (1997). The online guide to tradicional games. Recuperado el día 27 de Diciembre de 2009 en la dirección electrónica (<http://www.tradgames.org.uk/games/Tafl.htm>).
- García Déniz, M. (1997). El solitario: un juego con mucho juego. Recuperado el día 27 de Diciembre de 2009 en (http://www.sinewton.org/numeros/numeros/static/almacen_05.php).

■ Autoría

Antonio Bueno Aroca. Profesor Catedrático de Matemáticas.

Datos de contacto:

CENTRO: IES Parque Lineal de Albacete

TFNO: 967219112

CORREO: Antonio,Bueno@uclm.es

PÁGINA WEB: